

שיעור 1 - המכפלה הוקטורית

תאריך: 23/10/2025

הקדמה

שני מושגים חשובים שבמקור היינו צריכים לכסות בקורס הראשון, אך מסיבות פדגוגיות נדחו לכאן:

- א. מכפלות וקטוריות
- ב. מושג הסקלר

מדובר במושגים חשובים שנעשה בהם שימוש רב באלקטרומגנטיקה, והם חלק מהשפה המתמטית היומיומית בקורס.

סקירת וקטורים

הצגה קרטזית

בקורס הקודם הוצג מושג הוקטור. וקטור כללי ניתן לרישום באופן קרטזי:

- כשלשה:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

- או באמצעות פריסה במרחב הכרטזי:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

משמעות הפריסה במרחב הכרטזי היא שכדי להגיע לווקטור $\vec{a}$, עלינו ללכת a_x צעדים לאורך ציר x , ואז a_y צעדים לאורך ציר y , ואז a_z צעדים לאורך ציר z .

הצגות אלטרנטיביות

יש דרכים נוספות להציג וקטורים:

קואורדינטות פולריות (דו-ממד)

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$$

קואורדינטות כדוריות (תלת-ממד)

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\phi \hat{\phi}$$

בתלת-ממד יש שלוש קואורדינטות כדוריות:

- קואורדינטה רדיאלית (r)
- זווית θ (זווית פולרית)
- זווית ϕ (זווית אזימוטלית)

קואורדינטות צילינדריות

בקורס זה נעשה שימוש אינטנסיבי (לפי המרצה) בקואורדינטות צילינדריות:

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_z \hat{z}$$

קואורדינטות צילינדריות משלבות קואורדינטות פולריות במישור (r ו- θ) עם קואורדינטה קרטזית בציר z . אלו קואורדינטות המתאימות לסימטריה של גליל (צילינדר).

מכפלה סקלרית (סקלרית)

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ מוגדרת כ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

כאשר θ היא הזווית בין הוקטורים.

זה שקול לסכום מכפלות המרכיבים:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

מספר תכונות חשובות:

- הגודל של וקטור: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$
- וקטור יחידה: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- האורך של וקטור יחידה: $\hat{a} \cdot \hat{a} = 1$
- ההיטל של וקטור $\vec{a}$ על ציר x הוא $\vec{a} \cdot \hat{x} = a_x$
- המכפלה הסקלרית היא קומוטטיבית: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

מהו סקלר?

המרצה הדגיש שסקלר הוא לא רק "מספר". מספר הוא מושג פרימיטיבי, ואילו סקלר הוא מושג יותר מתוחכם.

סקלר הוא גודל שאינו משתנה תחת טרנספורמציה (אינווריאנט תחת טרנספורמציה).

למשל, כאשר מבצעים סיבוב של וקטור, הגודל שלו (האורך) אינו משתנה - זהו גודל סקלרי. הוקטור עצמו משתנה תחת טרנספורמציה (באופן לינארי), אך גודלו נשמר.

דוגמה: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ הוא גודל סקלרי שלא ישתנה תחת טרנספורמציה סיבוב.

מכפלה וקטורית

המכפלה הוקטורית של שני וקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$ מוגדרת כ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{n}$$

כאשר:

- $\hat{n}$ הוא וקטור יחידה שניצב למישור הנפרס על ידי הוקטורים $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$
- θ היא הזווית בין הוקטורים
- כיוון $\hat{n}$ נקבע לפי כלל יד ימין

הבדלים חשובים בין מכפלה סקלרית למכפלה וקטורית:

א. המכפלה הסקלרית מייצרת סקלר, המכפלה הוקטורית מייצרת וקטור

ב. המכפלה הסקלרית $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ כאשר $\vec{a} \perp \vec{b}$ (ניצבים)

ג. המכפלה הוקטורית $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ כאשר $\vec{a}$ מקביל ל- $\vec{b}$ (או כאשר אחד מהם הוא וקטור האפס)

התאפסות המכפלה הסקלרית משמעותה התאפסות מספרית, ואילו התאפסות המכפלה הוקטורית משמעותה התאפסות וקטורית (וקטור האפס).

מכפלה וקטורית (המשך)

הכיוון של המכפלה הוקטורית

כבר ציינו שוקטור היחידה $\hat{n}$ הוא ניצב למישור שנפרס על ידי $\vec{a}$ ו- $\vec{b}$, אבל יש כאן אמביגואיות שצריך להבהיר: וקטור הניצב למישור יכול להיות בכיוון אחד או בכיוון ההפוך. כדי להגדיר את הכיוון באופן חד-משמעי, נשתמש בכלל יד ימין.

כלל יד ימין

כאשר האצבעות מצביעות בכיוון הוקטור הראשון $\vec{a}$, ומתקפלות לעבר הוקטור השני $\vec{b}$, האגודל מצביע בכיוון המכפלה הוקטורית $\vec{a} \times \vec{b}$.

הגודל של וקטור המכפלה $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ הוא:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

והכיוון של $\vec{c}$ נקבע על ידי כלל יד ימין.

מכפלה וקטורית של וקטורי יחידה

נבדוק את המכפלות הוקטוריות בין וקטורי היחידה שפורסים את המערכת הקרטזית $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$:

מכפלה של וקטור בעצמו

$$\hat{x} \times \hat{x} = |\hat{x}| |\hat{x}| \sin(0) \cdot \hat{n} = 0$$

באופן כללי, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, כיוון שהזווית בין וקטור לעצמו היא 0, ו- $\sin(0) = 0$.

לפי המרצה, זאת פעם ראשונה שאנחנו רואים גודל שאינו אפס, שכאשר "מכפילים" אותו בעצמו (מכפלה וקטורית), התוצאה היא וקטור האפס. (הערה: לדעתי אולי גם תחת פעולות מודוס זה יכול להתקיים).

מכפלות בין וקטורי יחידה שונים

נבחן את המכפלות בין וקטורי היחידה השונים:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

זה מדגים שהמכפלה הוקטורית היא אנטי-קומוטטיבית:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

באופן דומה:

$$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

פרמוטציות ציקליות

פרמטציה ציקלית היא החלפה (פרמטציה = תמורה) של האיברים בסדר מחזורי.

ניתן לסדר את וקטורי היחידה בשלשה: $\hat{z}, \hat{y}, \hat{x}$

אם מבצעים פרמוטציה ציקלית (תמורה מחזורית), מקבלים:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

ואם מחליפים את סדר הוקטורים במכפלה, מקבלים מינוס:

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

$$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$$

פיתוח מכפלה וקטורית באמצעות מרכיבים

כדי לחשב מכפלה וקטורית $\vec{a} \times \vec{b}$ באמצעות המרכיבים שלהם, נפתח את הוקטורים בבסיס הסטנדרטי:

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$$

המכפלה תהיה:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}) \times (b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z})$$

נפתח את המכפלה ונשתמש בתכונות שראינו קודם:

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \vec{0}$$

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}, \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

$$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}, \hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}, \hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

לאחר פיתוח המכפלה וקיבוץ איברים, נקבל:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}$$

דטרמיננטים ומכפלה וקטורית

המכפלה הוקטורית ניתנת לחישוב באמצעות דטרמיננטים. דטרמיננט הוא מושג מאלגברה לינארית שמשמש למגוון מטרות.

דטרמיננט מסדר 2x2

דטרמיננט של מטריצה 2x2 מוגדר כך:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

דטרמיננט מסדר 3x3

דטרמיננט של מטריצה 3x3 ניתן לחשב באמצעות פיתוח לפי שורה או עמודה:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

מכפלה וקטורית כדטרמיננט

המכפלה הוקטורית $\vec{a} \times \vec{b}$ ניתנת לייצוג כדטרמיננט:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

פיתוח הדטרמיננט נותן:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{x} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

שזה שווה ל:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{x} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{y} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{z}$$

מכפלה משולשת

מכפלה סקלרית משולשת

המכפלה הסקלרית המשולשת $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ היא מספר (סקלר) וניתנת לחישוב באמצעות דטרמיננט:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

מכפלה זו אינווריאנטית תחת פרמוטציה ציקלית של הוקטורים:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

מכפלה וקטורית משולשת

המכפלה הוקטורית המשולשת $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ היא וקטור וניתנת לפישוט:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

בניגוד למכפלה הסקלרית המשולשת, המכפלה הוקטורית המשולשת אינה אינווריאנטית תחת פרמוטציה ציקלית.

סיכום

המתמטיקאים פיתחו שפות מתחכמות שבהן דברים מורכבים ניתנים לתיאור באופן פשוט וברור. מה שלמדנו בשיעור ניתן לתיאור אלגנטי ומתמצת יותר באמצעות הכלים המתמטיים המתאימים שרובנו, ככל הנראה, לא נלמד לעולם.

בשיעור הבא נגדיר את מושג השדה, את הגרדיאנט, את הדיברגנס ואת הרוטור, ונראה כיצד המכפלות הוקטוריות משתלבות בהם.

מבוא

שיעור זה עוסק בשדות סקלריים ווקטוריים ובאופרטורים דיפרנציאליים הפועלים עליהם. נושאים אלו מהווים את הבסיס המתמטי להבנת תופעות אלקטרומגנטיות ופיזיקליות אחרות.

שדות (Fields)

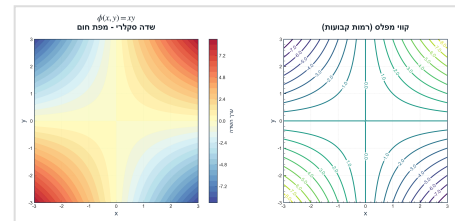
הגדרה

שדה הוא ישות מתמטית שממלאת את המרחב או את המישור, ומקבלת ערך בכל נקודה ונקודה.

שדה סקלרי (Scalar Field)

הגדרה: שדה שמצמיד לכל נקודה במרחב מספר (סקלר).

סימון: $\phi(x, y, z)$ או $\phi(\vec{r})$



דוגמה: טמפרטורה בחדר - לכל נקודה (x, y, z) בחדר מתאים ערך טמפרטורה.

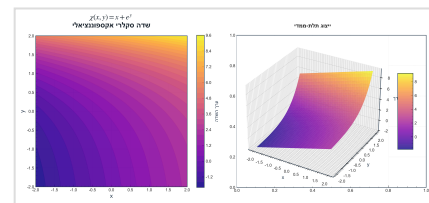
דוגמאות מתמטיות:

- שדה שמתאים לכל נקודה סקלר שהוא מכפלת איברי הווקטור:

$$\phi(x, y, z) = xyz$$

- שדה שמתאים לכל נקודה סכום של רכיב ליניארי ואקספוננציאלי:

$$\chi(x, y, z) = x + e^{yz}$$



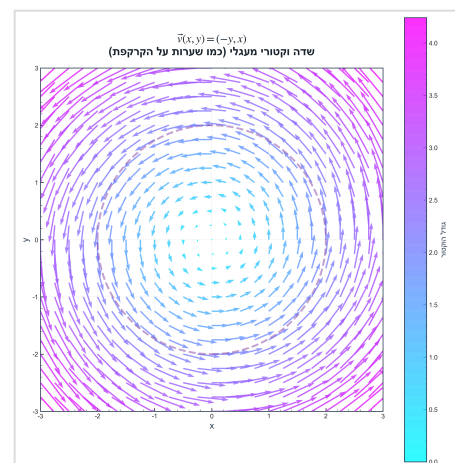
שדה וקטורי (Vector Field)

הגדרה: שדה שמצמיד לכל נקודה במרחב ווקטור.

סימון: $\vec{v}(x, y, z)$ או $\vec{v}(\vec{r})$

דוגמאות:

- מהירות וכיוון זרימת אוויר בחדר
- כיוון השיערוט על הקרקפת (שדה רדיאלי)



ייצוג מתמטי:

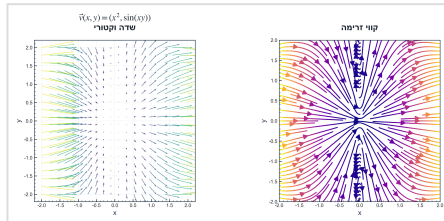
$$\vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\hat{x} + v_y(x, y, z)\hat{y} + v_z(x, y, z)\hat{z}$$

דוגמה קונקרטית:

$$\vec{v}(x, y, z) = x^2\hat{x} + \sin(xy)\hat{y} + e^{yz}\hat{z}$$

כאשר:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z) &= x^2 \\ v_y(x, y, z) &= \sin(xy) \\ v_z(x, y, z) &= e^{yz} \end{aligned}$$



אופרטורים דיפרנציאליים

אופרטור הגרדיאנט (Gradient/Del/Nabla)

הגדרה: אופרטור וקטורי המסומן ב- ∇ (נבלא), grad או del :

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

פעולה על שדה סקלרי (על פונקציה $\phi(x, y, z)$, להבנת):

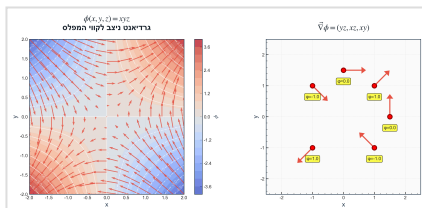
$$\vec{\nabla} \phi = \hat{x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

תוצאה: שדה וקטורי

דוגמאות:

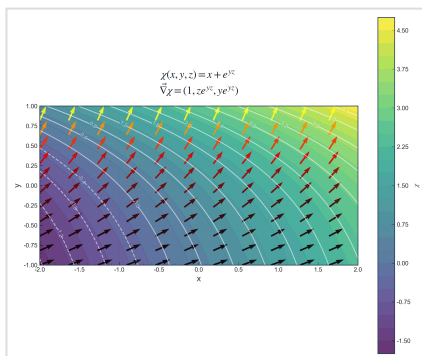
א. עבור $\phi(x, y, z) = xyz$:

$$\vec{\nabla} \phi = \hat{x}(yz) + \hat{y}(xz) + \hat{z}(xy)$$



ב. עבור $\chi(x, y, z) = x + e^{yz}$:

$$\vec{\nabla} \chi = \hat{x} + \hat{y}(ze^{yz}) + \hat{z}(ye^{yz})$$



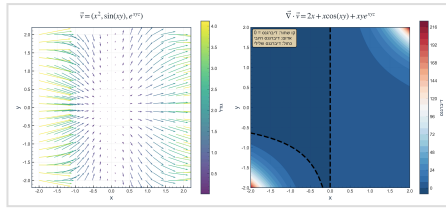
משמעות גיאומטרית

הגרדיאנט מתאר את כיוון השיפוע המרבי של השדה הסקלרי:

- מצביע בכיוון שבו השדה גדל במהירות הגבוהה ביותר
- ניצב למשטחים קבועים של השדה

הדיברגנס הוא:

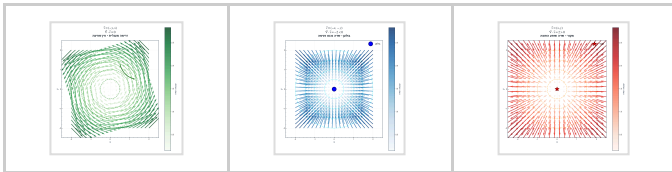
$$\nabla \cdot \vec{v} = 2x + x \cos(xy) + xye^{xyz}$$



משמעות פיזיקלית

הדיברגנס מודד את עוצמת השפעה של השדה הווקטורי:

- $\nabla \cdot \vec{v} > 0$: מקור (source) - השדה שופע החוצה מהנקודה
- $\nabla \cdot \vec{v} < 0$: בולען (sink) - השדה נכנס פנימה לנקודה
- $\nabla \cdot \vec{v} = 0$: אין שפיעה נטו



דוגמאות:

- מעיין מים: דיברגנס חיובי
- קיור מים: דיברגנס שלילי
- זרימה מעגלית טהורה: דיברגנס אפס

אופרטור הרוטור (Rotation / Curl)

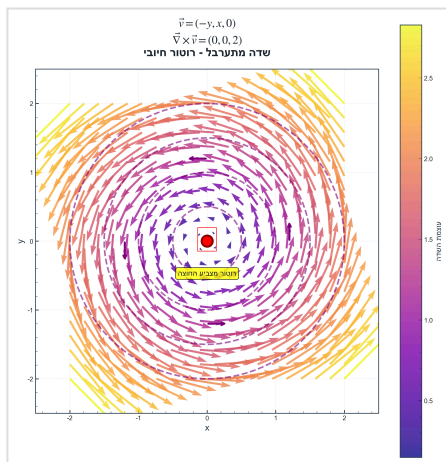
הגדרה: מכפלה וקטורית של ∇ עם שדה וקטורי:

$$\text{curl } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

פירוט:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \hat{x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

תוצאה: שדה וקטורי



משמעות פיזיקלית של הרוטור

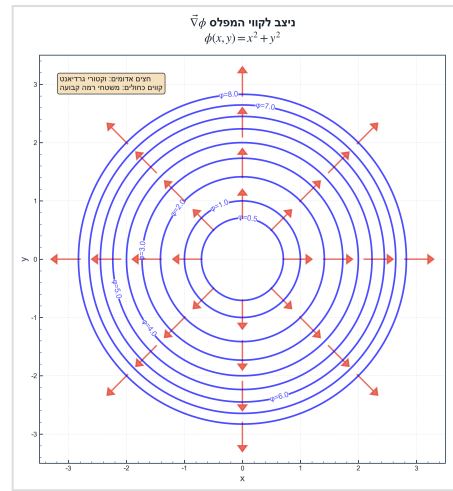
הרוטור מודד את עוצמת הערבוליות של השדה:

- $\nabla \times \vec{v} \neq \vec{0}$: השדה מתערבל (יש רוטציה מקומית)
- $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$: השדה ללא ערבוליות (irrotational)

כיוון הרוטור:

- ערבול נגד כיוון השעון: רוטור חיובי
- ערבול עם כיוון השעון: רוטור שלילי

דוגמאות:



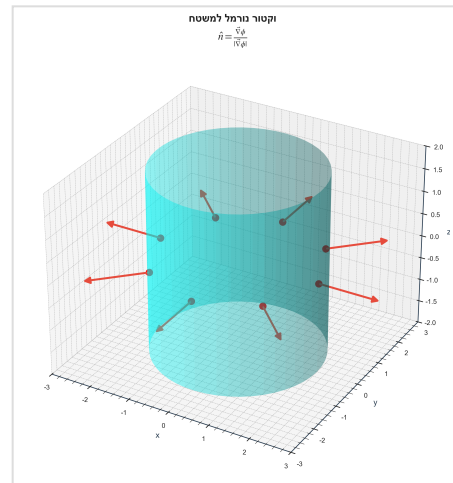
דוגמה: במפה טופוגרפית, הגרדיאנט מצביע בכיוון המורד/עלייה התלול ביותר.

שדה נורמלי למשטח

עבור משטח המוגדר על ידי $\phi(x, y, z) = c$:

$$\hat{n}(\vec{r}) = \frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|}$$

וקטור היחידה הניצב למשטח.



הוכחה (סקיצה):

- עבור משטח $\phi(x, y, z) = c$ (קבוע)
- הדיפרנציאל: $d\phi = 0$
- $d\phi = \nabla \phi \cdot d\vec{r} = 0$
- $\nabla \phi \perp d\vec{r}$

כיוון ש- $d\vec{r}$ שוכב על המשטח, ניצב $\nabla \phi$ למשטח.

$$\hat{n}(\vec{r}) = \frac{\vec{\nabla} \phi}{|\vec{\nabla} \phi|}$$

אופרטור הדיברגנס (Divergence)

הגדרה: מכפלה סקלרית של ∇ עם שדה וקטורי:

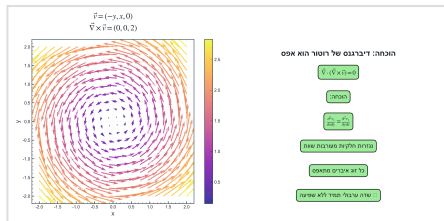
$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

תוצאה: שדה סקלרי

דוגמה: עבור השדה הווקטורי

$$\vec{v}(x, y, z) = x^2 \hat{x} + \sin(xy) \hat{y} + e^{xyz} \hat{z}$$

- הוריקן: רוטור גדול באזור המרכז
- שדה רדיאלי טהור: רוטור אפס



שטף (Flux)

הגדרה אינטואיטיבית

שטף מודד את כמות השדה הווקטורי העוברת דרך משטח נתון.

אנלוגיה: גשם היורד דרך חלון:

- כאשר החלון ניצב לכיוון הגשם $\leftarrow$ שטף מקסימלי
- כאשר החלון מקביל לכיוון הגשם $\leftarrow$ שטף אפס
- במצבים ביניים $\leftarrow$ שטף תלוי בזווית

תלות בזווית

עבור שדה $\vec{v}$ ומשטח עם נורמל $\hat{n}$:

- $\vec{v} \parallel \hat{n}$: שטף מקסימלי
- $\vec{v} \perp \hat{n}$: שטף אפס
- זווית כללית: השטף תלוי ב- $\hat{n} \cdot \vec{v}$

המרכיב התורם לשטף: רק המרכיב של $\vec{v}$ בכיוון הנורמל $\hat{n}$ תורם לשטף.

הגדרה מתמטית

השטף של שדה וקטורי $\vec{v}$ דרך משטח S עם אלמנט שטח $d\vec{A} = \hat{n}dA$:

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n} dA$$

כאשר $\hat{n}$ הוא וקטור הנורמל למשטח.

משפט הדיברגנס (Divergence Theorem)

משפט הדיברגנס, המכונה גם **משפט גאוס** או **משפט גרין**, קושר בין אינטגרל נפחי של הדיברגנס לבין אינטגרל משטחי של השטף:

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{v}) dV = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

כאשר:

- V - נפח סגור
- S - המשטח הסגור התחום את הנפח
- $d\vec{A}$ - אלמנט שטח מכוון כלפי חוץ

פרשנות פיזיקלית:

- **אגף שמאל**: סך כל המקורות (שפיעה נטו) בתוך הנפח
- **אגף ימין**: סך כל השטף היוצא דרך המשטח החיצוני
- **משמעות**: מה שנוצר בפנים (מקורות) חייב לצאת החוצה (שטף).

סיכום

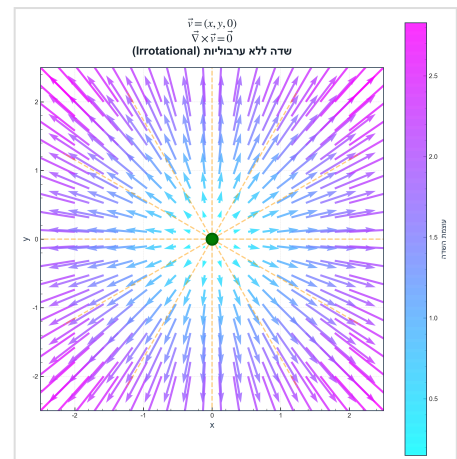
אופרטור	קלט	פלט	סימון	משמעות
Gradient	שדה סקלרי	שדה וקטורי	$\vec{\nabla}\phi$	כיוון השיפוע המרבי
Divergence	שדה וקטורי	שדה סקלרי	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$	עוצמת השפיעה
Curl	שדה וקטורי	שדה וקטורי	$\vec{\nabla} \times \vec{v}$	עוצמת הערבוליות

זהויות יסודיות:

א. $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$ - לגרדיאנט אין ערבוליות

ב. $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$ - לרוטור אין שפיעה

בשיעורים הבאים נשתמש במושגים האלו כדי לתאר תופעות אלקטרומגנטיות.



זהויות וקטוריות חשובות

רוטור של גרדיאנט

משפט: עבור כל שדה סקלרי ϕ :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{0}$$

הוכחה:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

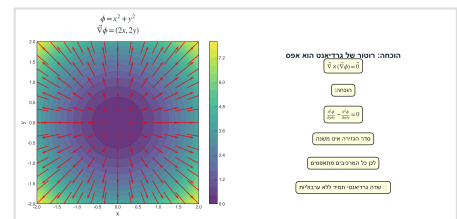
המרכיב ב- $\hat{x}$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0$$

עקרון: סדר הגזירה בנגזרות חלקיות אינו משנה.

באופן דומה, כל המרכיבים מתאפסים.

מסקנה: שדה גרדיאנטי הוא תמיד ללא ערבוליות.



דיברגנס של רוטור

משפט: עבור כל שדה וקטורי $\vec{v}$:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$$

הוכחה:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

פתיחת הסוגריים:

$$= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y}$$

כל זוג איברים מתאפס בגלל שוויון נגזרות חלקיות מעורבות:

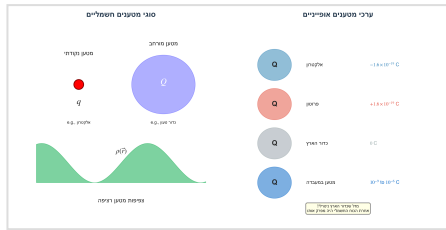
$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x}, \text{ etc.}$$

מסקנה: שדה ערבולי הוא תמיד ללא שפיעה (דיברגנס אפס).

מטען האלקטרון הוא עשירית של מיליארדית של מיליארדית של קולון - מטען קטן מאוד. קולון הוא מטען גדול מאוד - צריך 10^{19} אלקטרונים כדי לקבל מטען של קולון אחד.

מטענים במעבדה הם בדרך כלל מסדר גודל של:

- 10^{-6} C (מיקרו-קולון)
- 10^{-9} C (ננו-קולון)



2.3 אטום המימן - דוגמה לניטרליות

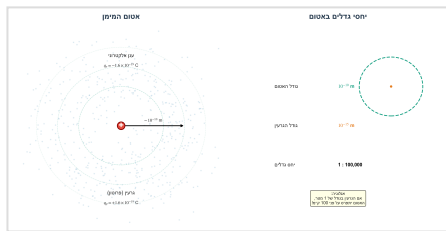
באטום מימן יש גרעין עם פרוטון טעון חיובית ($+1.6 \times 10^{-19}$ C) וענן אלקטרוני טעון שלילית (-1.6×10^{-19} C). בסך הכל האטום ניטרלי.

יחסי הגדלים באטום:

- קוטר אטום המימן: כ- 10^{-10} מטר (1 אנגסטרם)
- גודל הגרעין (פרוטון): כ- 10^{-15} מטר

הגרעין קטן בחמישה סדרי גודל מהאטום. אם נגדיל את הפרוטון למטר אחד, הענן האלקטרוני יתפרס למרחק של כ-100 קילומטר - מהאזור הזה עד בירות בצפון, עכו במערב, רבת עמון או ירושלים בדרום (לא מעט).

הנפח של הפרוטון קטן ב-15 סדרי גודל מנפח האטום (כי נפח הולך כמו רדיוס בשלישית). כמעט כל המסה של האטום מרוכזת בגרעין (רק 1/2000 מהמסה בענן האלקטרוני). לכן האטום הוא ברובו ריק מוחלט.



דוגמה מעודדת: אם מסלקים מאדם את כל הנפח המיותר (הנפח האלקטרוני) ומשאירים רק את החומר בצפיפות גרעינית, האדם מצטמצם לגודל של בקטריה - כ-50 מיקרון. כל השאר הוא שדה אלקטרוני כמעט חסר מסה.

בטבע קיימים כוכבי נייטרונים - כוכבים שקרסו מהם כל האלקטרונים. כוכב עם מסה של השמש (333,000 מסות כדור הארץ) מרוכז בכדור בקוטר של כ-20 קילומטר - כגודל תל אביב.

כולנו בסך הכל ריקים, עם מעט מאוד חומר אמיתי בתוכנו.

2.4 חישוב מטען כולל מצפיפות

כשנתונה צפיפות מטען רציפה $\rho(\vec{r}, t)$ בנפח Ω , המטען הכולל הוא:

$$Q_\Omega = \int_\Omega \rho(\vec{r}, t) d^3r$$

כאשר $d^3r = dx dy dz$ הוא אלמנט הנפח.

3. העיקרון היסודי: מטען חשמלי קורן את השפעתו למרחב

זאת טענה שאין לנו דרך להוכיח אלא באמצעות תצפית.

אחת התופעות שאנחנו שמים אליהן לב היא שגופים טעונים במטען חשמלי קורנים את השפעתם למרחב.

3.1 הגדרת שדה הפוטנציאל החשמלי

כדי לתת ביטוי מתמטי לרעיון ש"מטען קורן השפעה למרחב" (שטרם ברור לכותב שורות אלו, לשם ההגינות), נגדיר **שדה וקטורי** $\vec{D}$ שמאפיין את המטען החשמלי או שמושרה על ידי המטען החשמלי.

ההגדרה המתמטית:

1. מבוא: ארבעת הכוחות היסודיים בטבע

בטבע קיימים ארבעה כוחות יסודיים:

- **כוח הכבידה** - מחזיק את הכוכבים ואת הגלקסיות במסלולם. זה הכוח שבונה את היקום שלנו בממדים גדולים - שמש וירח בגלקסיות, צבירי גלקסיות והיקום כולו.
- **הכוח האלקטרומגנטי** - זה הכוח שנלמד לעומק בקורס. הכוח האלקטרומגנטי אחראי לכל הכימיה שבעולם ובלעדיו אין בעולם גיוון.
- **הכוח הגרעיני החזק והכוח הגרעיני החלש** - כוחות חשובים ביותר שבלעדיהם אין לכוח האלקטרומגנטי על מה לפעול.

התורה האלקטרומגנטית עברה שתי פאזות משמעותיות במהלך ההיסטוריה. הפאזה הראשונה הייתה סוף המאה ה-19, תחילת המאה ה-20, כאשר מספר אנשים אינטליגנטים פיתחו את התורה האלקטרומגנטית הקלאסית. התורה האלקטרומגנטית הקלאסית נותנת תיאור יפה לגבי אינטראקציות אלקטרומגנטיות בין גופים שנמצאים במעבדה ומעגלים חשמליים.

יש רמות שונות של תיאורים אלגנטיים בתורה. ככל שהרמה גבוהה יותר, התיאור אלגנטי יותר, יפה יותר ומעורר השראה. הבעיה היא רמת המתמטיקה הנדרשת, שבמקרה שלנו לא מספיקה בלשון המעטה (דור - יש לי תואר במדעי המחשב שגם לא מספיק, ככל הנראה). לכן נלמד בעיקר דברים פחות אלגנטיים, למרבה הצער.

2. המטען החשמלי - אבן הראשה של התורה האלקטרומגנטית

קיימת תכונה בסיסית ביותר שמכונה **מטען חשמלי**. זאת תכונה של הטבע, שמנקודת מבטנו כרפואנים שלעולם לא יהיו מהנדסים, צריכה להיות "God given" - אבן היסוד הבסיסית ביותר.

המטען החשמלי דומה ל"מטען הכבידתי" שהזכרנו על פניו בשיעור מכניקה. מטען כבידתי הוא משהו שמרגיש כוח כבידה - אם יש למשהו מטען כבידתי, הוא יודע אם יש כבידה בסביבה או אין כבידה בסביבה. באופן דומה, קיים מטען שחש כוח מסוג חדש שנקרא **כוח חשמלי**.

1.2 תיאור המטען החשמלי

המטען החשמלי ניתן לתיאור בשני אופנים:

א. **מטען נקודתי או מטען של גוף סופי:**

- q (קטן) - מטען של גוף נקודתי (כמו אלקטרון)
- Q (גדול) - מטען כולל של גוף שאינו נקודתי (כמו כדור טעון)

ב. **צפיפות מטען רציפה:**

כשנעסוק בריכוז גדול של מטענים (למשל 10^{30} אלקטרונים), מרחוק זה ייראה כמו "נוזל של אלקטרונים". במקרה כזה נתאר את המטען באמצעות צפיפות:

$$\rho(\vec{r}, t)$$

זה שדה סקלרי - פונקציה של המקום ושל הזמן, שנותנת את צפיפות המטען בכל נקודה ונקודה.

2.2 יחידות ודוגמאות

יחידות: ביחידות MKS, המטען נמדד בקולון (Coulomb).

דוגמאות למטענים:

- **מטען כדור הארץ:** $Q_{\text{Earth}} = 0$ בדיוק, תודה לאל. זה מזל גדול - אם כדור הארץ והירח היו טעונים במטענים חשמליים, לא היו חיים. הכוח החשמלי חזק בעשרות סדרי גודל מכוח הכבידה (כ-40 סדרי גודל!). האינטראקציות היו חזקות עד כדי התפרקות כדור הארץ במקרה אחר.

- **מטען האלקטרון:** $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C (מטען שלילי)
- **מטען הפרוטון:** $q_p = +1.6 \times 10^{-19}$ C (מטען חיובי)

להבדיל ממטענים כבידתיים שהם תמיד חיוביים, מטענים אלקטרומגנטיים מגיעים בשני סימנים - חיוביים ושליליים.

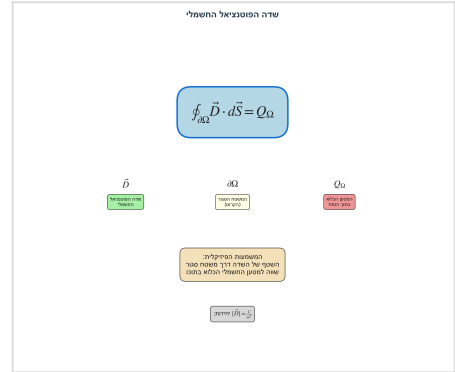
קיים שדה וקטורי המושרה על ידי המטען החשמלי כך ש:

$$\Phi = \oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_\Omega$$

כאשר:

- Φ - השטף (flux) של השדה דרך המשטח
- $\partial\Omega$ - הקרום (המשטח הסגור) שתוחם את הנפח Ω
- Q_Ω - המטען הכולל הכלוא בתוך הנפח

במילים לא פשוטות: השטף שיוצא מהקרום שתוחם את Ω שווה למטען החשמלי שכלוא בתוך Ω .



3.2 חישוב השטף

השטף דרך אלמנט שטח אינפיניטסימלי:

$$d\Phi = \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D} \cdot \hat{n} dS$$

כאשר $d\vec{S} = \hat{n} dS$ - וקטור ששטחו dS וכיוונו בכיוון הנורמל $\hat{n}$.
השטף הכולל דרך משטח סגור:

$$\Phi = \oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

3.3 שם השדה ויחידותיו

לשדה $\vec{D}$ קוראים:

- שדה הפוטנציאל החשמלי** (Electric Displacement Field)
- או מסיבות היסטוריות: **שדה ההעתק**
- יחידות:** כדי שיהיה שוויון יחידות בין שני האגפים:

$$[\vec{D}] = \frac{C}{m^2}$$

4. חוק גאוס ומשוואת מקסוול הראשונה

4.1 הצורה האינטגרלית - חוק גאוס

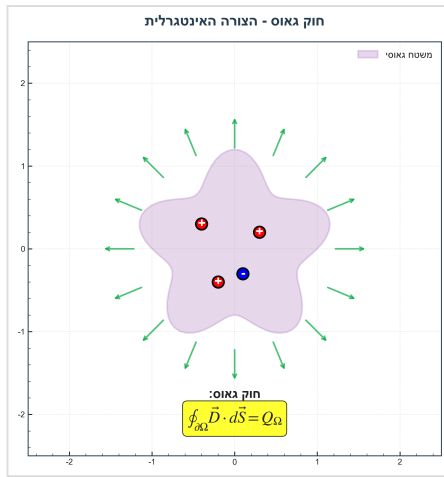
$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_\Omega$$

כאשר המטען הכולל ניתן על ידי:

$$Q_\Omega = \int_\Omega \rho(\vec{r}, t) d^3r$$

לכן:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_\Omega \rho(\vec{r}, t) d^3r$$



4.2 הצורה הדיפרנציאלית - משוואת מקסוול הראשונה

באמצעות משפט הדיברגנס:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_\Omega \nabla \cdot \vec{D} d^3r$$

משילוב עם חוק גאוס:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{D} d^3r = \int_\Omega \rho d^3r$$

מכיוון ששני האינטגרלים המרחביים שווים לכל נפח Ω , האינטגרנדים שווים:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

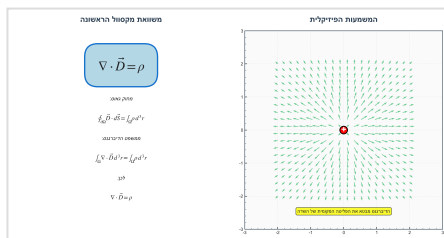
זאת **משוואת מקסוול הראשונה** - אחת מארבע משוואות מקסוול שמתארות את כל התורה האלקטרומגנטית.

המשמעות הפיזיקלית: הדיברגנס של $\vec{D}$ (הפליטה המקומית של השדה) מבטא את צפיפות המטען החשמלי המקומית.

הבדל בין הצורות:

- חוק גאוס - חוק גלובלי (אינטגרל על משטח סופי)
- משוואת מקסוול - חוק לוקלי (נכון בכל נקודה ונקודה)

חשוב להדגיש: פיזיקאים בסוף המאה ה-19 עשו אינספור ניסויים במעבדה כדי להגיע למשוואות האלו. אנחנו הגענו אליהן בלי שום ניסוי, רק משיקולים פילוסופיים נטו - מההנחה שמטען קורן השפעה למרחב (ומכך שבכלל קיים דבר כזה "מטען").



5. יישום חוק גאוס - מטען נקודתי

5.1 הבעיה והסימטריה

נחשב את השדה $\vec{D}$ שמושרה ממטען נקודתי q (למשל אלקטרון).

נבנה בדמיון כדור סביב המטען - הכדור קיים רק בראש, לא במציאות. המטען ממוקם במרכז הכדור. לנפח הכדור נקרא Ω , ולקרום (הקליפה) שתוחם אותו נקרא $\partial\Omega$.

זאת בעיה עם סימטריה רדיאלית קלאסית - לא משנה איפה אנחנו על הקליפה, הקונפיגורציה תמיד תיראה אותו הדבר. אין העדפה של נקודה מסוימת על הקליפה. המרחק מהמטען הוא תמיד אותו מרחק, וכיוון ההשפעה תמיד בכיוון הנורמל (הרדיאלי).

5.2 החישוב

מסימטריה:

מסקנה חשובה: מבחינת השדה מחוץ לכדור, אין הבדל אם המטען נקודתי או מפוזר בכדור - הסימטריה הכדורית נשמרת.

7.2 קליפה כדורית טעונה

קליפה כדורית דקה עם מטען Q על הקליפה.

מחוץ לקליפה ($r > R$):

מאותם שיקולי סימטריה:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

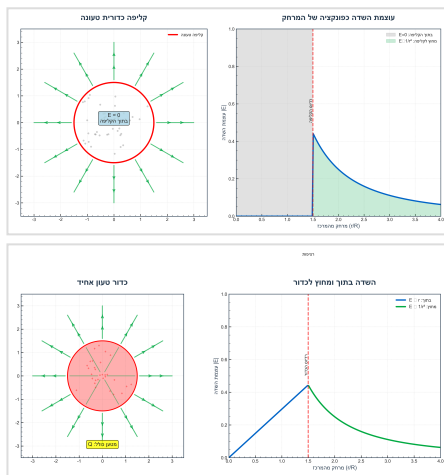
בתוך הקליפה ($r < R$):

בנה משטח גאומי כדורי בתוך הקליפה. מסימטריה, השדה (אם קיים) חייב להיות רדיאלי.

אבל המטען התחום על ידי המשטח הגאומי הפנימי הוא: $Q_{\text{inside}} = 0$
לכן מחוק גאוס:

$$4\pi r^2 E_r = 0 \Rightarrow E_r = 0$$

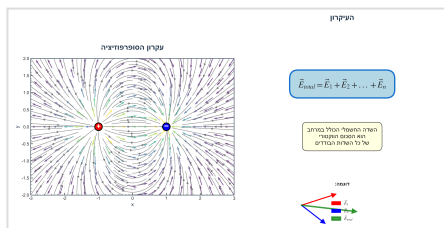
מסקנה: בתוך קליפה כדורית טעונה השדה החשמלי הוא אפס!



8. מטענים חיוביים ושליליים

- מטען חיובי - מקור:** קורן את השפעתו החוצה מהמרחב. קווי השדה יוצאים ממנו.
- מטען שלילי - בולען:** קורן את השפעתו מהמרחב פנימה. קווי השדה נכנסים אליו.

כאשר יש במרחב שני מטענים או יותר, השדה הכולל הוא הסכום הוקטורי של השדות הבודדים - עקרון הסופרפוזיציה.



9. הערות על הפיתוח

חוק גאוס, שהיה צריך לבנות אותו במשך עשרות שנים עד שהבינו שהוא מתאר את התופעות החשמליות במציאות, התגלה כאן כהגדרה של שדה ההשפעה החשמלית. משוואת מקסוול הראשונה התגלתה כביטוי הלוקלי של אותה הגדרה.

שיהיה בהצלחה!

- השדה $\vec{D}$ חייב להיות בכיוון רדיאלי: $\vec{D} = D_r(r) \hat{r}$
- הגודל D_r יכול להיות פונקציה רק של המרחק r , לא של הזוויות לכן:

$$\vec{D} \cdot \hat{n} = D_r(r)$$

כיוון ש- D_r קבוע על פני כל הקליפה:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_r(r) \oint_{\partial\Omega} dS = D_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

מחוק גאוס:

$$4\pi r^2 D_r(r) = q$$

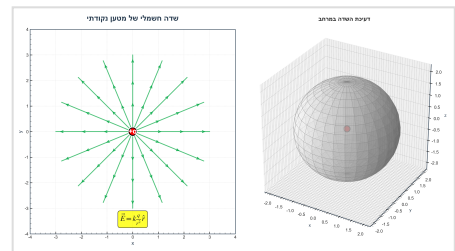
לכן:

$$D_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

או בצורה וקטורית:

$$\vec{D} = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

השדה דועך כמו $1/r^2$ והוא מכון רדיאלי.



6. הגדרת שדה העוצמה החשמלית

נגדיר שדה חדש $\vec{E}$ דרך הקשר:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon}$$

כאשר ϵ הוא קבוע שמאפיין את התווך שבו מונח המטען.

עבור ריק (ואקום): $\epsilon = \epsilon_0$ (הפרמיטיביות של הריק)
עבור מטען נקודתי בריק:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

נגדיר:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ (some units)}$$

אז:

$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

הקבלה לכבידה:

- שדה כבידה: $\vec{g} = G \frac{M}{r^2} \hat{r}$
- שדה חשמלי: $\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$

7. קונפיגורציות סימטריות נוספות

7.1 כדור מלא טעון

כדור ברדיוס R עם מטען כולל Q מפוזר בתוכו.
מאותם שיקולי סימטריה כדורית, עבור $r > R$:

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

3. חוק קולון - הכוח בין מטענים

3.1 הכוח על מטען בשדה חשמלי

הכוח האלקטרוסטטי הפועל על מטען q בשדה חשמלי $\vec{E}$:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

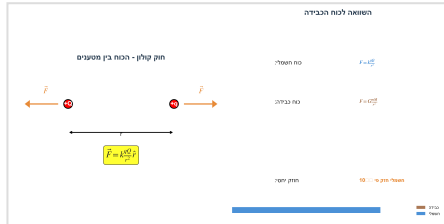
זהו האנלוג החשמלי לחוק $\vec{F} = m\vec{g}$ בכבידה.

3.2 הכוח בין שני מטענים נקודתיים

עבור מטען q שנמצא בשדה של מטען Q :

$$\vec{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r} = k \frac{qQ}{r^3} \vec{r}$$

זהו חוק קולון (Coulomb's Law).



האנלוגיה לכבידה:

• כוח כבידה: $\vec{F} = G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$

• כוח חשמלי: $\vec{F} = k \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$

שני הכוחות דועכים כ- $1/r^2$, אך הכוח החשמלי חזק בכ-40 סדרי גודל.

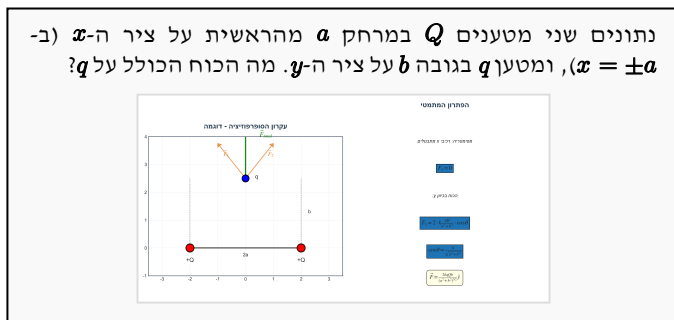
4. עקרון הסופרפוזיציה

כשיש מספר מטענים במרחב, הכוח הכולל על מטען כלשהו הוא הסכום הווקטורי של כל הכוחות:

$$\vec{F}_{\text{total}} = q \sum_i \vec{E}_i = kq \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

עקרון הסופרפוזיציה נובע מכך שהאלקטרוסטטיות מתוארות באמצעות וקטורים, והוא מהווה הוכחה אמפירית שהתיאור הווקטורי נכון.

4.1 דוגמה: שני מטענים סימטריים



פתרון:

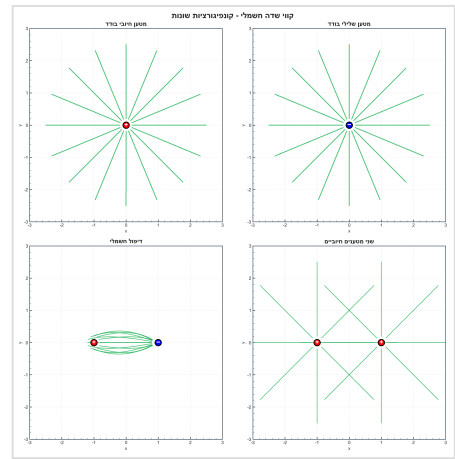
מסימטריה, הרכיבים בכיוון x מתבטלים. הכוח הכולל בכיוון y :

$$F_y = 2 \cdot k \frac{qQ}{a^2 + b^2} \cdot \cos \theta = 2k \frac{qQb}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

כאשר $\cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

בצורה וקטורית:

$$\vec{F} = \frac{2kqQb}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \hat{y}$$



שיעור 4 - חוק גאוס וחוק קולון

תאריך: 13/11/2025

1. סיכום המשוואות היסודיות

בשיעור הקודם פיתחנו שתי משוואות מרכזיות מתוך הנחת יסוד אחת - שמטען חשמלי קורן את השפעתו למרחב:

1.1 חוק גאוס (הצורה האינטגרלית)

$$\Phi = \oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\Omega} \quad (1)$$

במילים: השטף של שדה הפוטנציאל החשמלי $\vec{D}$ דרך הקרום $\partial\Omega$ שווה למטען החשמלי Q שכלוא בתוך הנפח Ω .

זאת ההגדרה של שדה ההשפעה $\vec{D}$ המושרה מהמטען החשמלי.

1.2 משוואת מקסוול הראשונה (הצורה הדיפרנציאלית)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2)$$

זאת משוואה לוקלית - נכונה בכל נקודה ונקודה במרחב. הדיברגנס (הפליטה המקומית) של $\vec{D}$ שווה לצפיפות המטען החשמלי ρ באותה נקודה.

כאשר המטען הכולל בנפח נתון על ידי:

$$Q_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}, t) d^3r$$

2. הקשר בין שדה הפוטנציאל לשדה העוצמה החשמלית

הגדרנו את שדה העוצמה החשמלית דרך הקשר:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

כאשר ϵ_0 הוא הפרמיטיביות של הריק, ככל הנראה, אבל בשלב הזה פחות רלוונטי או מובן לנו - לפחות למיטב הבנתי.

עבור מטען נקודתי בריק קיבלנו:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

כאשר הקבוע האלקטרוסטטי:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ (some units)}$$

הערה פילוסופית: המעבר מ- $\vec{E}$ ל- ϵ_0 דרך ϵ_0 אינו טריוויאלי. יש לו משמעות עמוקה שתובהר בהמשך. הקשר הזה דומה במהותו לקשר $E = mc^2$ שמקשר בין אנרגיה למסה.

5. יישומי חוק גאוס - קונפיגורציות סימטריות

5.1 כדור טעון אחיד

כדור ברדיוס R טעון במטען כולל Q בצפיפות אחידה ρ .
מה השדה החשמלי בתוך הכדור ומחוץ לו?

חישוב צפיפות המטען:

$$Q = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

השדה בתוך הכדור ($r < R$):

בונים משטח גאומי כדורי ברדיוס $r < R$. המטען הכלוא:

$$Q(r) = \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = Q \frac{r^3}{R^3}$$

מחוק גאוס:

$$4\pi r^2 D_r = Q \frac{r^3}{R^3}$$

לכן:

$$E_r = \frac{kQ}{R^3} r$$

השדה גדל לינארית עם r בתוך הכדור!

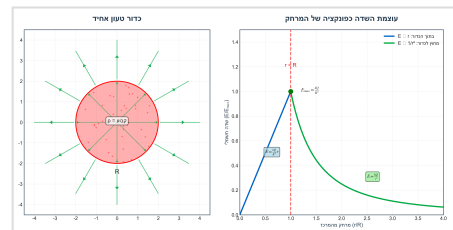
השדה מחוץ לכדור ($r > R$):

$$E_r = \frac{kQ}{r^2}$$

כמו מטען נקודתי - הכדור נראה כמטען נקודתי מבחוץ.

גרף השדה:

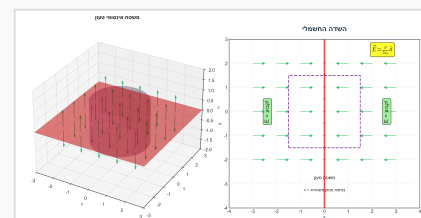
- בתוך הכדור: $E \propto r$ (עולה לינארית)
- על פני הכדור: $E_{\max} = kQ/R^2$
- מחוץ לכדור: $E \propto 1/r^2$ (דועך)



5.2 משטח אינסופי טעון

משטח אינסופי טעון בצפיפות משטחית אחידה σ (קולון למטר רבוע).

מה השדה החשמלי שנוצר על ידי המשטח?



ניתוח סימטריה: מסימטריה, השדה חייב להיות ניצב למשטח. אין רכיב מקביל למשטח כי המשטח אינסופי.

בניית משטח גאומי: גליל שחותך את המשטח, עם בסיסים מקבילים למשטח.

חישוב:

השטף יוצא רק דרך שני הבסיסים (לא דרך המעטפת):

$$2 \cdot \pi r^2 \cdot D_z = \sigma \cdot \pi r^2$$

לכן:

$$D_z = \frac{\sigma}{2}$$

ובמונחי שדה חשמלי:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

תוצאה מפתיעה: השדה קבוע ואינו תלוי במרחק מהמשטח!

5.3 שני משטחים מקבילים - קבל

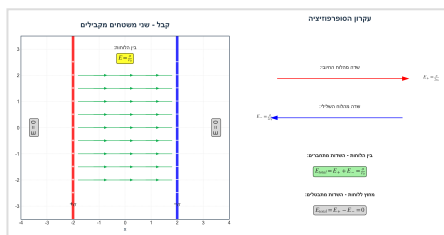
שני משטחים אינסופיים מקבילים, האחד טעון ב- $+\sigma$ והשני ב- $-\sigma$.

סופרפוזיציה:

• בין המשטחים: השדות מתחברים, $E = \sigma/\epsilon_0$

• מחוץ למשטחים: השדות מתבטלים, $E = 0$

זוהי הקונפיגורציה הבסיסית של **קבל** - רכיב אלקטרוני שמגביל שדה חשמלי בתוך נפח מוגדר.



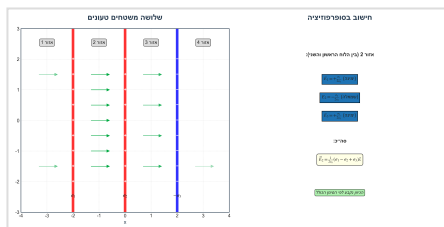
5.4 שלושה משטחים טעונים

עבור שלושה משטחים עם צפיפויות $\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3$, השדה בכל אזור נקבע על ידי סופרפוזיציה.

דוגמה לחישוב באזור 2 (בין המשטח הראשון והשני):

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{2\epsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3)\hat{z}$$

הסימן נקבע לפי כיוון התרומה של כל משטח.



5.5 תיל אינסופי טעון

תיל ישר אינסופי טעון בצפיפות קווית אחידה λ (קולון למטר).
מה השדה החשמלי סביב התיל?

ניתוח סימטריה:

- סימטריה גלילית סביב התיל
- אין רכיב בכיוון התיל (מסימטריה: כל נקודה למעלה מבוטלת על ידי נקודה למטה)

משטח גאומי: גליל ברדיוס r ואורך L סביב התיל.

חישוב:

השטף יוצא רק דרך המעטפת:

$$2\pi r L \cdot D_r = \lambda L$$

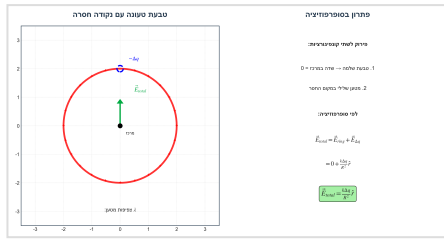
לכן:

$$D_r = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

ובמונחי שדה חשמלי:

1.2 דוגמה: טבעת עם מטען חסר

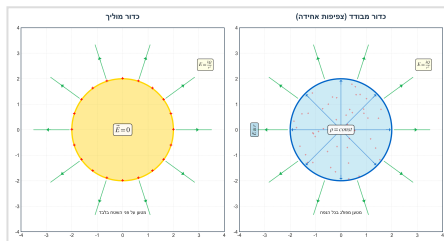
נתבונן בטבעת שטעונה בצפיפות מטען λ קולון ליחידת אורך. נוריד נקודה אחת על פני המעגל (נבטל את הסימטריה). מה יהיה השדה במרכז המעגל?



פתרון: סופר פוזיציה של המעגל המלא (שדה אפס במרכז) והמטען השלילי שהורדנו:

$$\vec{E}_{total} = 0 + \frac{k\Delta q}{R^2} \hat{r}$$

2. מוליכים לעומת מבודדים



תכונות מוליכים באלקטרוסטטיקה:

- בתוך מוליך בשיווי משקל: $E = 0$
- כל המטען העודף נמצא על פני השטח
- כדור מלא מוליך שקול לקליפה טעונה מבחינה אלקטרוסטטית

3. שדה של כדור טעון בצפיפות אחידה

3.1 הבעיה

כדור מבודד ברדיוס R טעון בצפיפות מטען אחידה ρ (קולון למטר מעוקב).
 חשבו את השדה החשמלי בתוך הכדור ומחוץ לו.

3.2 הפתרון

בתוך הכדור ($r < R$):

מבניית משטח גאומטרי כדורי ברדיוס r :

$$\underbrace{4\pi r^2 E_r}_{*} = \frac{Q_{inside}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{\epsilon_0}$$

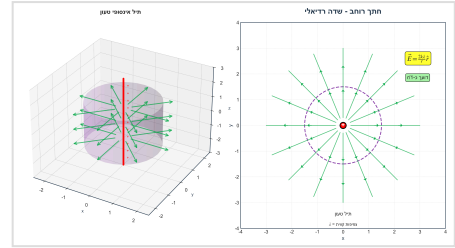
לכן:

$$E_r = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

השדה גדל לינארית עם הרדיוס!

$$E_r = \frac{2k\lambda}{r}$$

השדה דועך כ- $1/r$ (לא כ- $1/r^2$!).



6. סיכום התוצאות החשובות

קונפיגורציה	השדה החשמלי
מטען נקודתי	$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$
כדור טעון (בפנים)	$\vec{E} = k \frac{Q}{R^2} \hat{r}$
כדור טעון (בחוץ)	$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$
משטח אינסופי	$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$
תיל אינסופי	$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{r} \hat{r}$

7. הערות

- חשיבות הסימטריה:** חוק גאוס שימושי עבור קונפיגורציות סימטריות. ללא סימטריה, החישוב מסובך מאוד.
 - משוואה גלובלית מול לוקלית:** חוק גאוס הוא משוואה גלובלית (אינטגרל על נפח), משוואת מקסוול היא לוקלית (נכונה בכל נקודה).
 - עקרון הסופרפוזיציה:** מאפשר לחשב שדות מורכבים כסכום של שדות פשוטים.
 - יחידות:** חשוב לעקוב אחרי היחידות - קולון, ניוטון, מטר.
- עם הכלים שפיתחנו עד כה, לכאורה ניתן לפתור את רוב השאלות על שדות חשמליים סטטיים. בשיעורים הבאים נעסוק בתנועת מטענים ובמוליכים.

שיעור 5 - שדות חשמליים בגאומטריות שונות

תאריך: 20/11/2025

1. חזרה - מטען נקודתי וסופר פוזיציה

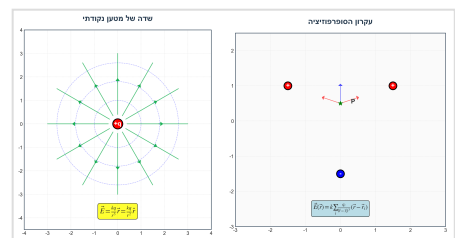
1.1 נוסחאות בסיסיות

מטען נקודתי:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \vec{r}$$

סופר פוזיציה:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r}) = k \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$



4. כדור עם צפיפות מטען משתנה

4.1 הבעיה

כדור מבודד עם התפלגות מטען:

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r^2} \cosh\left(\frac{\ln 2 \cdot r}{R}\right)$$

כאשר C/m ו- R רדיוס הכדור.

חשבו את השדה החשמלי בתוך הכדור ומחוץ לו, ואת המטען הכולל.

4.2 חישוב המטען הכולל

$$Q(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \cdot \frac{\alpha}{r'^2} \cosh\left(\frac{\ln 2 \cdot r'}{R}\right) dr' = 4\pi \alpha \cdot \frac{R}{\ln 2} \sinh\left(\frac{\ln 2 \cdot r}{R}\right)$$

4.3 השדה החשמלי

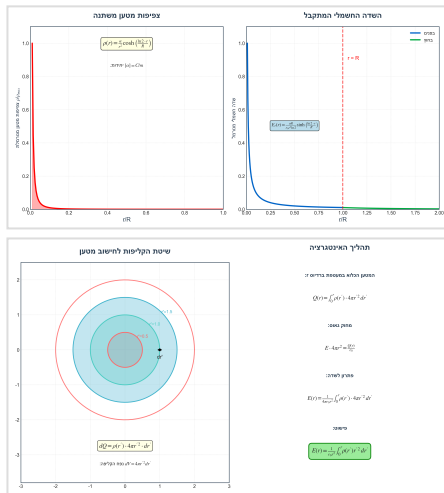
מחוק גאוס:

$$E_r(r) = \frac{\alpha R}{\epsilon_0 \ln 2} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\ln 2 \cdot r}{R}\right)}{r^2}$$

4.4 המטען הכולל

ב- $r = R$, עם $\sinh(\ln 2) = \frac{3}{4}$:

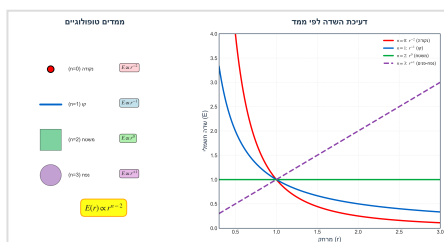
$$Q_{total} = \frac{3\pi\alpha R}{\ln 2}$$



5. התנהגות השדה לפי ממד טופולוגי

5.1 טבלת סיכום

ממד	דוגמה	התנהגות	נוסחה
0 (נקודה)	מטען נקודתי	$E \propto r^{-2}$	$E = kq/r^2$
1 (קו)	גליל אינסופי	$E \propto r^{-1}$	$E = 2k\lambda/r$
2 (משטח)	מישור אינסופי	$E = \text{const}$	$E = \sigma/2\epsilon_0$
3 (נפח)	כדור (בפנים)	$E \propto r^1$	$E = \rho r/3\epsilon_0$



5.2 הכללה מתמטית

עבור מטען בממד טופולוגי n :

★ Explanation of Gauss's Law Terms

Looking at your equation:

$$\underbrace{4\pi r^2 E_r}_{?} = \frac{Q_{inside}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3}}{\epsilon_0}$$

Left Side: $4\pi r^2 E_r$

This is the **flux** through a spherical Gaussian surface:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r \cdot A_{sphere} = E_r \cdot 4\pi r^2$$

Where:

- $4\pi r^2$ = surface area of a sphere with radius r
- E_r = radial component of the electric field (constant on the surface by symmetry)

Important Note for Future Problems!

This equation uses **spherical geometry** (sphere surface area $4\pi r^2$).

But a coaxial cylinders problem requires **cylindrical geometry**:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r \cdot 2\pi r L$$

Where $2\pi r L$ is the lateral surface area of a cylinder with radius r and length L .

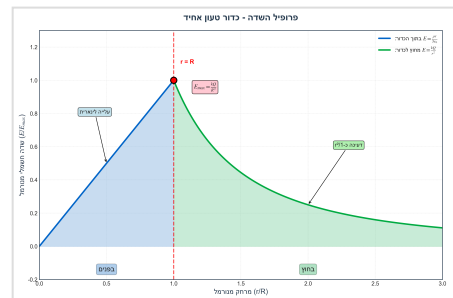
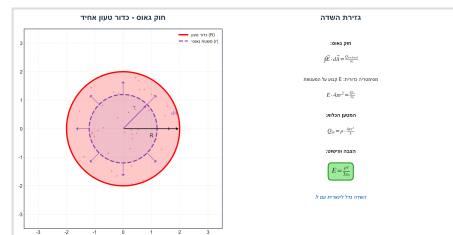
For cylindrical cases with linear charge density λ :

$$E_r \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

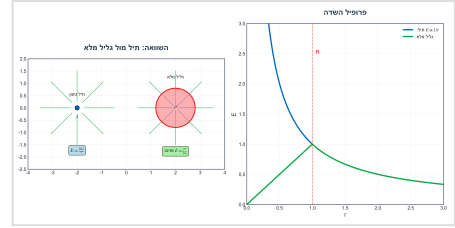
מחוץ לכדור ($r > R$):

$$E_r = \frac{kQ_{total}}{r^2} = \frac{k \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \rho}{r^2}$$



$$E(r) \propto r^{n-2}$$

המשמעות: איזון בין התפשטות השדה במרחב (r^2) לבין כמות המטען (q).



6. סיכום

- חוק גאוס - כלי רב-עוצמה לחישוב שדות בבעיות סימטריות
- צפיפות משתנה - דורשת אינטגרציה לחישוב המטען הכלוא
- ממד טופולוגי - קובע את דעיכת השדה: $E \propto r^{n-2}$
- מוליכים - שדה אפס בפנים, מטען על פני השטח

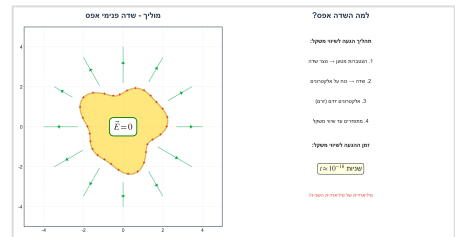
שיעור 6 - מוליכים, חוק גאוס ומבוא לאנרגיה

תאריך: 27/11/2025

חלק א': מוליכים והתנהגות מטענים

עקרון יסודי: אין הצטברות מטען בתוך מוליך

בתוך מוליך לא יכולה להיות הצטברות של מטענים (למעט הצטברות שמייצרת שדה אפס)



הסיבה הפיזיקלית

- יש הצטברות מטען $\leftarrow$ נוצר שדה בתוך המוליך
- שדה $\leftarrow$ כוח על מטענים $\leftarrow$ המטענים זזים (זרם)
- המטענים מתפזרים עד להגעה לשיווי משקל
- שיווי משקל = המטענים על קליפות המוליך

זמן ההגעה לשיווי משקל

$$t \approx 10^{-18} \text{ s}$$

להמחשה:

- 10^{-9} = מיליארדית השנייה
- 10^{-18} = מיליארדית של מיליארדית השנייה

מאפייני מוליכים

- מכילים גז של אלקטרונים כמעט חופשיים
- האלקטרונים אחוזים לאטומים באחיזה חלשה מאוד
- יכולים לקפוץ מאטום לאטום בקלות
- בכל אזור במוליך - המטען הכולל ניטרלי (בקירוב)

חלק ב': מוליך כדורי חלול - ניתוח מפורט

תיאור המערכת

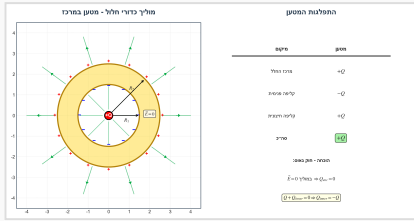
מוליך כדורי עם:

- רדיוס פנימי: R_1
- רדיוס חיצוני: R_2
- חלל פנימי (ריק)

- שכבת מתכת בין R_1 ל- R_2

מקרה 1: מטען Q במרכז החלל

השאלה: איך מתפלג המטען על המוליך? כלומר, מה המטען על הקליפה הפנימית ומה המטען על הקליפה החיצונית?



מה קורה?

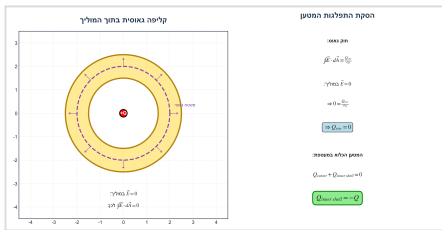
- המטען $+Q$ במרכז יוצר שדה רדיאלי
- דרישה: שדה אפס בתוך המוליך
- פתרון: על הקליפה הפנימית מצטבר $-Q$

הוכחה באמצעות חוק גאוס

בונים קליפה גאוסית בתוך המוליך (בין R_1 ל- R_2):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

- השדה בתוך המוליך: $\vec{E} = 0$
- לכן: $Q_{enc} = 0$
- המסקנה: $Q_{inner} + Q_{inner shell} = 0$
- לכן: $Q_{inner shell} = -Q$



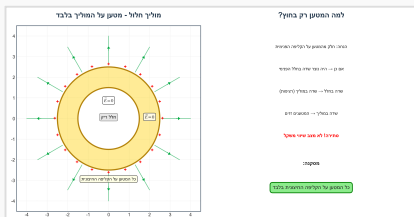
שימור מטען

- המוליך היה ניטרלי
- אם נלקח $-Q$ לקליפה הפנימית
- חייב להישאר $+Q$ על הקליפה החיצונית

סיכום התפלגות המטען

מטען	מיקום
$+Q$	מרכז החלל
$-Q$	קליפה פנימית
$+Q$	קליפה חיצונית
$+Q$	סה"כ

מקרה 2: מטען Q_{big} על המוליך (ללא מטען בפנים)



שאלה: איך מתפלג המטען? כלומר, מהו המטען על הקליפה הפנימית ועל הקליפה החיצונית?

תשובה: כל המטען מתרכז על הקליפה החיצונית בלבד

סיכום נקודות מפתח

נושא	נקודה מרכזית
מוליך	שדה פנימי = 0 תמיד
מטען במוליך	מתרכז על פני השטח בלבד
זמן שיווי משקל	$10^{-18} \sim$ שניות
קליפה גאוסית במוליך	רואה מטען אפס בפנים
שימור מטען	חוק שימור בסיסי

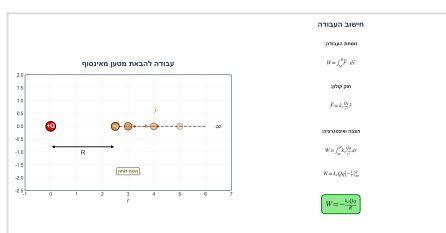
נניח שבמקום מסוים במרחב מרוכז מטען שגודלו Q . המטען הזה מייצר במרחב שדה שדועך ביחס $1/r^2$.

נניח שיש לי מטען קטן באינסוף q

נניח ש q מטען חיובי ו- Q מטען חיובי.

Q מפעיל שדה שמושך את q לכיוון Q .

השאלה: איזה עבודה מבצע Q על q כאשר q נע מאינסוף למרחק R מ- Q ?



פתרון:

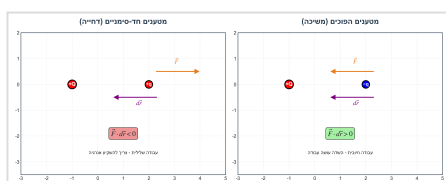
ניעזר בנוסחת העבודה:

$$W = \int_{\infty}^{r=R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

לפי חוק קולון:

$$\vec{F} = k_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$$

כשהסימן שלילי כוח מושך $(-\vec{r})$.



נחזור ונציב באינטגרל:

$$W = \int_{\infty}^R k_e \frac{Qq}{r^2} dr$$

$$W = k_e Qq \left[-\frac{1}{r} \right]_{\infty}^R$$

$$W = k_e \frac{Qq}{R}$$

$$= -\frac{K_e Qq}{R} + \frac{K_e Qq}{\infty}$$

סך הכל:

$$W = -k_e \frac{Qq}{R}$$

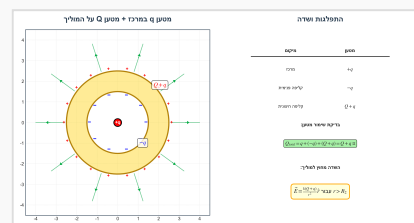
הסבר

- אם חלק מהמטען היה על הקליפה הפנימית $\leftarrow$ היה שדה בתוך המוליך
- שדה בתוך המוליך $\leftarrow$ המטענים היו זזים (לא מצב סטטי)
- מסקנה:** במצב של שיווי משקל, כל המטען בחוץ

מקרה 3: מטען q במרכז ועוד מטען Q על המוליך

א. מה התפלגות המטען במוליך?

ב. מה השדה מחוץ למוליך?



התפלגות המטען

מיקום	מטען	הסבר
מרכז	$+q$	נתון
קליפה פנימית	$-q$	כדי שהשדה בתוך המוליך יהיה אפס
קליפה חיצונית	$Q+q$	שימור מטען: $Q+q-q=Q$ על המוליך

בדיקת שימור מטען

$$Q_{total} = q + (-q) + (Q+q) = Q+q$$

זה נכון! שמנו q במרכז ו- Q על המוליך.

השדה מחוץ למוליך

$$\vec{E} = \frac{k(Q+q)}{r^2} \hat{r} \quad \text{for } r > R_2$$

חלק ג': עקרונות חשובים

עיקרון 1: השדה בתוך מוליך תמיד אפס

$$\vec{E}_{\text{inside a conductor}} = 0$$

עיקרון 2: המטען מתרכז על פני השטח

- כל המטען העודף במוליך נמצא על פני השטח בלבד
- אין מטען נטו בפנים הפנימי של המוליך

עיקרון 3: שימור מטען

$$\sum Q = \text{const}$$

- מטען לא יכול להיעלם או להיווצר יש מאין
- חשבונות המטען חייבים להישמר (כמו חשבונות מסה)

עיקרון 4: קליפה גאוסית בתוך מוליך

- אם $\vec{E} = 0$ על הקליפה $\leftarrow Q_{enc} = 0$
- זה קובע את התפלגות המטען על פני השטח

חלק ד': מבוא לעבודה ולאנרגיה (יושלם בשיעור הבא)

נושאים שילמדו

- עבודה בשדה חשמלי - הגדרה וחישוב
- אנרגיה אלקטרוסטטית - אנרגיה הנובעת מתצורת מטענים
- אנרגיה מכנית - קשר לאנרגיה קינטית ופוטנציאלית
- פוטנציאל חשמלי - מושג מרכזי בשיעור הבא

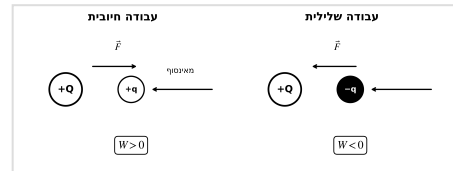
חזרה מהשיעור הקודם

בשיעור שעבר חישבנו את העבודה שנדרשת להביא חלקיק מהאינסוף. קיבלנו:

$$W = q \cdot V(\vec{r})$$

כלל חשוב:

- עבודה חיובית - כאשר המטענים הם שווים סימן (דחייה)
- עבודה שלילית - כאשר המטענים הם הפוכים סימן (משיכה)



מושג הפוטנציאל החשמלי

כוח משמר ופונקציית פוטנציאל

במכניקה דיברנו על כוח משמר. לפי הגדרה, **כוח משמר** הוא כוח שניתן לרשום אותו כגרדיאנט של פונקציית פוטנציאל:

$$\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$$

העבודה של כוח משמר:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(r_i) - U(r_f)$$

חישוב העבודה של מטען Q על מטען q

$$W = -kQq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right)$$

העבודה החיצונית (נגד הכוח):

$$W_{\text{outer}} = k \frac{Qq}{r}$$

הגדרת הפוטנציאל החשמלי

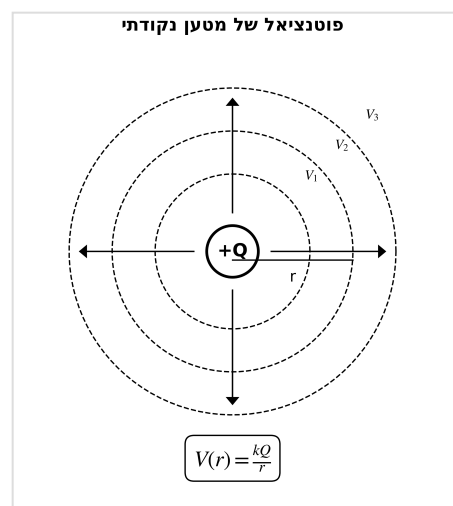
הפוטנציאל החשמלי של מטען נקודתי Q :

$$V_Q = k \frac{Q}{r}$$

כאשר קבוע קולון הוא:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

פוטנציאל של מטען נקודתי



סופרפוזיציה של שדות ופוטנציאלים

כשיש קונפיגורציה של מטענים, ניתן לחשב את השדה בכל מקום במרחב באמצעות **סופרפוזיציה** של שדות של מטענים בודדים.

חישוב אנרגיה פוטנציאלית

האנרגיה הפוטנציאלית היא סופרפוזיציה של כל הזוגות האפשריים שניתן לבנות מהקונפיגורציה.

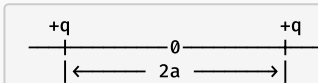
חישוב פוטנציאל

הפוטנציאל הוא סופרפוזיציה של הפוטנציאל שנוצר מכל המטענים שיש בסביבה.

דוגמה 1: שני מטענים חיוביים

במישור $y-x$, נניח שני מטענים:

- מטען $+q$ במרחק a מהראשית
- מטען $+q$ במרחק a מהראשית (בצד השני)



השדה במרכז (בראשית)

$$\vec{E}(\vec{r} = 0) = \vec{0}$$

כל מטען יוצר שדה בגודל $\frac{kq}{a^2}$, אך בכיוונים הפוכים - לכן השדה הכולל הוא אפס (שני וקטורים שמבטלים זה את זה).

הערה חשובה: כותבים $\vec{E} = \vec{0}$ (וקטור האפס), לא סתם $E = 0$. וקטור האפס בתלת-ממד הוא שלושה אפסים: $(0, 0, 0)$.

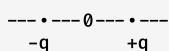
הפוטנציאל במרכז

$$V(\vec{r} = 0) = \frac{kq}{a} + \frac{kq}{a} = \frac{2kq}{a}$$

הפוטנציאל הוא **סקלר** - חיבור של שני גדלים זהים. הפוטנציאל במרכז **אינו אפס**.

דוגמה 2: דיפול חשמלי

נתון **דיפול** (דו-קוטב): מטען $+q$ ומטען $-q$ במרחק a מהראשית. מהו השדה והפוטנציאל במרכז?



השדה במרכז

מטען חיובי הוא **מעין** (השדה יוצא ממנו), מטען שלילי הוא **בולען** (השדה נכנס אליו).

$$\vec{E}(\vec{r} = 0) = \frac{2kq}{a^2} \hat{x}$$

השדות מחוברים באותו כיוון.

הפוטנציאל במרכז

$$V(\vec{r} = 0) = \frac{kq}{a} + \frac{k(-q)}{a} = 0$$

הפוטנציאל מתאפס כי מחברים שני גדלים עם סימנים הפוכים.

כלל חשוב

פוטנציאל של מטען בודד: $V = \frac{kQ}{r}$

הסימן של המטען קובע את סימן הפוטנציאל:

- מטען חיובי $\leftarrow$ פוטנציאל חיובי

$$dV = \frac{k \cdot dq}{r} = \frac{k \cdot \rho(r) \cdot 4\pi r^2 \cdot dr}{r} = 4\pi k \cdot \rho(r) \cdot r \cdot dr$$

הפוטנציאל הכולל:

$$V = \int_0^R dV(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \rho(r) \cdot r \cdot dr$$

$$4\pi k = \frac{1}{\epsilon_0} \text{ כאשר}$$

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-r/R} \text{ עבור}$$

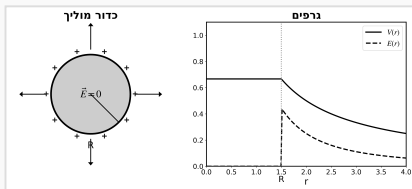
$$V = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_0^R r \cdot e^{-r/R} dr$$

האינטגרל נפתר באמצעות אינטגרציה בחלקים.

כדור מוליך טעון

נתון כדור מוליך ברדיוס R טעון במטען Q . המטען מתרכז על השפה.

מהו השדה והפוטנציאל בכל המרחב?



השדה והפוטנציאל

מחוץ לכדור ($r > R$):

$$V(r > R) = \frac{kQ}{r}$$

בתוך הכדור ($r < R$):

השדה בתוך מוליך הוא אפס (אחרת המטענים היו זזים).

$$\vec{E} = 0 \Rightarrow V = \text{const}$$

מכיוון ש- $\vec{E} = -\nabla V$, אם השדה אפס - הפוטנציאל קבוע. הפוטנציאל בתוך הכדור שווה לפוטנציאל על השפה:

$$V(r < R) = \frac{kQ}{R}$$

קווים שווי-פוטנציאל

- קווי השדה תמיד ניצבים לקווים שווי-פוטנציאל
- הסיבה: הגרדיאנט נותן שדה ניצב למשטחים שווי-ערך

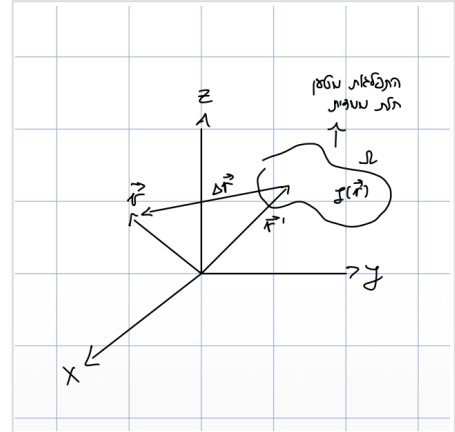
$$\vec{E} = -\nabla V$$

פוטנציאל של התפלגות מטען רציפה

הגדרת הבעיה

במצבים רבים המטען אינו נקודתי אלא מפולג ברצף במרחב באמצעות צפיפות מטען $\rho(\vec{r})$.

נתונה התפלגות מטען תלת-ממדית $\rho(\vec{r}')$. נרצה למצוא את הפוטנציאל בנקודה $\vec{r}$.



הגדרות

- $\vec{r}'$ - קואורדינטת אלמנט המטען
- $\vec{r}$ - נקודת התצפית
- $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$ - וקטור המרחק

אלמנט מטען

$$dq = \rho \cdot dV = \rho(\vec{r}') \cdot d^3r'$$

כאשר $d^3r' = dx' \cdot dy' \cdot dz'$ הוא אלמנט נפח אינפיניטסימלי.

תרומת אלמנט המטען לפוטנציאל

$$dV = \frac{k \cdot dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

הפוטנציאל הכולל

$$V(\vec{r}) = \int_{\Omega} \frac{k \cdot \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

כאשר Ω הוא הנפח המכיל את צפיפות המטען.

זהו אינטגרל תלת-ממדי (שלושה אינטגרלים), אך במקרים סימטריים ניתן לרדד אותו לאינטגרל חד-ממדי.

דוגמה: כדור עם צפיפות מטען מתכלה

נתון כדור מלא ברדיוס R עם צפיפות מטען:

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot e^{-r/R}$$

מה הפוטנציאל?

בדיקת גבולות

- ב- $r = 0$: $\rho(0) = \rho_0$ (בעייתי מתמטית אך סופי)
- ב- $r = R$: $\rho(R) = \rho_0/e$
- ב- $r = 0$: יש בעיה עם $1/0^2$ אם הצפיפות הייתה ρ_0/r^2

חישוב הפוטנציאל על שפת הכדור

נסתכל על תרומה של קליפה כדורית ברדיוס r קטן.

המטען על הקליפה:

$$dq(r) = \rho(r) \cdot dV = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$V = \frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2}$$

(בתוך שתי הקליפות - כל קליפה תורמת ערך קבוע)

באזור $R_1 < r < R_2$:

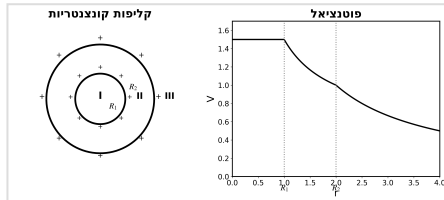
$$V = \frac{kQ_1}{r} + \frac{kQ_2}{R_2}$$

(מחוץ לקליפה הפנימית, בתוך החיצונית)

באזור $r > R_2$:

$$V = \frac{k(Q_1 + Q_2)}{r}$$

(מחוץ לשתי הקליפות)



הארקת הקליפה הפנימית

השאלה

מה קורה כשמאריקים את הקליפה הפנימית (מאלצים עליה פוטנציאל אפס)?

התשובה

על הקליפה הפנימית הפוטנציאל צריך להתאפס:

$$\frac{kQ_1}{R_1} + \frac{kQ_1^*}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2} = 0$$

כאשר Q_1^* הוא המטען החדש שזורם מהאדמה.

פתרון:

$$Q_1^* = -\frac{R_1}{R_2} Q_2$$

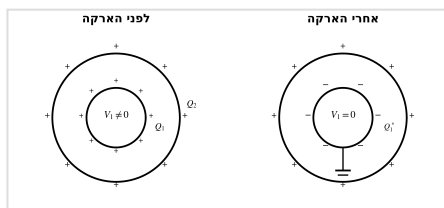
האדמה מביאה (או לוקחת) מטען כך שהפוטנציאל על הקליפה הפנימית יתאפס.

הפוטנציאל בתוך הקליפה הפנימית (אחרי הארקה)

הפוטנציאל בתוך הקליפה הפנימית הוא **סופרפוזיציה**:

$$V(r < R_1) = \frac{kQ_1^*}{R_1} + \frac{kQ_2}{R_2}$$

שימו לב: למרות שהפוטנציאל על הקליפה הפנימית הוא אפס, הפוטנציאל **בתוך** הקליפה אינו בהכרח אפס - הוא שווה לתרומת הקליפה החיצונית.

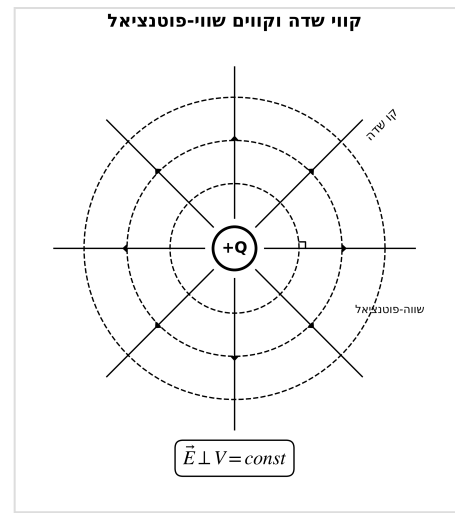


סיכום נקודות חשובות

א. **סופרפוזיציה:** הפוטנציאל הכולל הוא סכום התרומות מכל המטענים

ב. **שדה לעומת פוטנציאל:** שדה הוא וקטור (יכול להתאפס), פוטנציאל הוא סקלר

ג. **מוליך:** בתוך מוליך השדה אפס והפוטנציאל קבוע



הבהרה מקלוד:

קווים שווי-פוטנציאל הם קווים (או משטחים בתלת-ממד) שעליהם **הפוטנציאל החשמלי קבוע** - כל הנקודות על הקו נמצאות באותו ערך של V.

תכונה חשובה: קווי השדה החשמלי תמיד **ניצבים** לקווים שווי-פוטנציאל.

משמעות פיזיקלית: כשמזיזים מטען **לאורך** קו שווה-פוטנציאל, לא מבצעים עבודה (כי אין הפרש פוטנציאל).

הארקה (Grounding)

פוטנציאל כדור הארץ

מטען כדור הארץ קטן יחסית ($C \sim 10^5$), ורדיוס כדור הארץ גדול ($6,370 \text{ km}$).

לכן הפוטנציאל על פני כדור הארץ קטן מאוד, וניתן לקבוע:

$$V_{\text{earth}} = 0$$

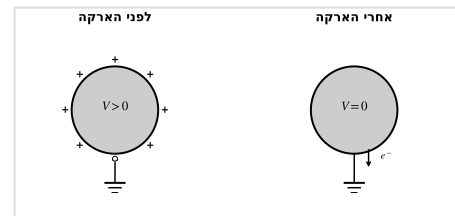
משמעות הארקה

חיבור מוליך לאדמה באמצעות חוט מוליך **מאלץ פוטנציאל אפס** על המוליך.

מה קורה כשמאריקים מוליך טעון?

- אם היה מטען חיובי עודף $\leftarrow$ אלקטרונים זורמים מהאדמה ומנטרלים אותו
- אם היה מטען שלילי עודף $\leftarrow$ אלקטרונים זורמים לאדמה

הארקה מאפסת את המטען העודף על המוליך.



שתי קליפות קונצנטריות

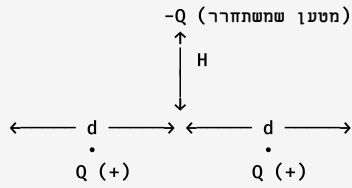
נתונות שתי קליפות מוליכות קונצנטריות:

- קליפה פנימית ברדיוס R_1 עם מטען Q_1
- קליפה חיצונית ברדיוס R_2 עם מטען Q_2
- מהו הפוטנציאל בכל אזור?

חישוב הפוטנציאל בכל המרחב (סופרפוזיציה)

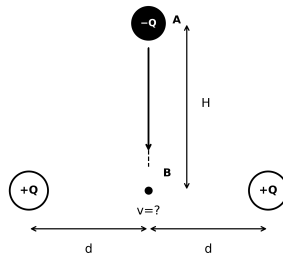
באזור $r < R_1$:

הסיטואציה



- שני מטענים $+Q$ במרחק d מהראשית (על ציר x)
- מטען $-Q$ משתחרר מגובה H (על ציר y)
- שאלה: באיזו מהירות יחצה את הראשית?

מטען נופל בין שני מטענים



$$\frac{1}{2}mv^2 = |q\Delta V|$$

הפתרון

שלב 1: חישוב הפוטנציאל למעלה (נקודה A)

$$V_A = 2 \cdot \frac{KQ}{\sqrt{d^2 + H^2}}$$

הסבר: שני המטענים תורמים באופן שווה (סופרפוזיציה של פוטנציאלים). בפוטנציאל אגב אין כיוון - סכום סקלרי.

שלב 2: חישוב הפוטנציאל בראשית (נקודה B)

$$V_B = 2 \cdot \frac{KQ}{d}$$

שימו לב אגב שזה לא אפס, למרות שהשדה אולי מתאפס.

שלב 3: חישוב הפרש הפוטנציאלים

$$\Delta V = V_B - V_A = 2KQ \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + H^2}} \right)$$

שלב 4: שימור אנרגיה

אם המטען משתחרר ממנוחה:

$$\frac{1}{2}mv^2 = |q \cdot \Delta V|$$

כי?

שלב 5: חילוץ המהירות

$$v = \sqrt{\frac{2|q \cdot \Delta V|}{m}}$$

ד. **הארכה:** מאלצת פוטנציאל אפס באמצעות זרימת מטענים מ/א ל האדמה

ה. **קווי שדה:** תמיד ניצבים לקווים שווי-פוטנציאל (כי $\vec{E} = -\nabla V$)
ו. **כלל יד ימין:** $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ חשוב לשמור על עקביות בקואורדינטות

שיעור 8 - אנרגיה, שימור מטען ומשוואות מקסוול

תאריך: 11/12/2025

חלק א': עבודה ואנרגיה פוטנציאלית חשמלית

עבודה של שדה חשמלי על מטען

העבודה שהשדה החשמלי מבצע על מטען q :

$$W = -q \cdot \Delta V = -q(V_B - V_A)$$

כאשר:

• ΔV = הפרש הפוטנציאלים

• V_A = פוטנציאל בנקודה A

• V_B = פוטנציאל בנקודה B

חוק שימור האנרגיה המכנית (האנלוג החשמלי)

המשוואה:

$$E_{K,A} + qV_A = E_{K,B} + qV_B$$

משמעות: האנרגיה המכנית בתחילת התהליך שווה לאנרגיה המכנית בסוף התהליך

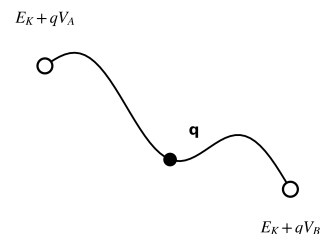
האנרגיה המכנית הכוללת:

$$E_{\text{mechanical}} = E_{\text{kinetic}} + E_{\text{potential}}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + qV$$

הערה: כשרלוונטי, יש להוסיף גם אנרגיות פוטנציאליות אחרות (כמו כבידה).

שימור אנרגיה מכנית



$$E_{K,A} + qV_A = E_{K,B} + qV_B$$

למה שימור אנרגיה עדיף על החוק השני של ניוטון?

הבעיה עם החוק השני של ניוטון

כשיש תנועה בשדה חשמלי משתנה:

- הכוח משתנה עם המרחק
- מקבלים משוואה דיפרנציאלית מסובכת
- קשה מאוד לפתור אותה

היתרון של שימור אנרגיה

- לא צריך לפתור משוואות דיפרנציאליות
- מספיק לחשב את הפוטנציאל בשתי נקודות
- הפתרון ישיר ופשוט

תכונה	הסבר
סקלרי	פוטנציאל הוא גודל סקלרי, לא וקטור
סופרפוזיציה	פוטנציאלים מתחברים אלגברית (לא וקטורית!)
יחידות	וולט (V) = ג'אול/קולון - אנרגיה פוטנציאלית ליחידת מטען
נוסחה	$V = \frac{KQ}{r}$ למטען נקודתי

זכרו: $V = \frac{KQ}{r}$ (לא r^2 !) - זה פוטנציאל, לא שדה!

מתי כבידה רלוונטית?

כבידה זניחה (רוב המקרים)

- אלקטרונים/פרוטונים: מסה קטנה מאוד ($\sim 10^{-31}$ kg)
- הכוח החשמלי « כוח הכבידה
- התאוצה החשמלית עצומה

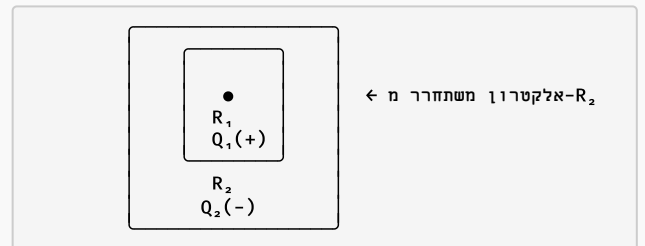
כבידה רלוונטית

- גופים מסיביים (גרמים ומעלה)
- מטענים קטנים יחסית
- יש להוסיף את האנרגיה הפוטנציאלית הכבידתית:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + qV + mgh$$

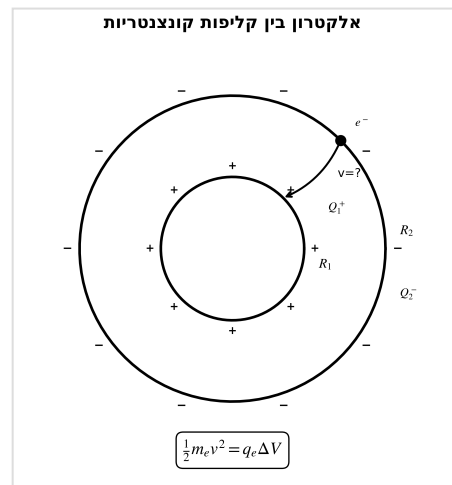
חלק ב': דוגמה - שתי קליפות כדוריות קונצנטריות

הסיטואציה - שאלה 2



- קליפה פנימית: רדיוס R_1 , מטען Q_1 (חיובי)
- קליפה חיצונית: רדיוס R_2 , מטען Q_2 (שלילי)
- שאלה: באיזו מהירות אלקטרון שמשחרר מ- R_2 יפגע ב- R_1 ?

אלקטרון בין קליפות קונצנטריות



חישוב הפוטנציאלים

פוטנציאל על הקליפה החיצונית (V_2)

סופרפוזיציה של שתי הקליפות:

$$V_2 = \frac{KQ_1}{R_2} + \frac{K(-|Q_2|)}{R_2} = \frac{KQ_1}{R_2} - \frac{K|Q_2|}{R_2}$$

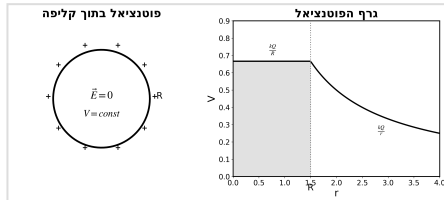
פוטנציאל על הקליפה הפנימית (V_1)

חשוב: הפוטנציאל בתוך קליפה כדורית קבוע!

$$V_1 = \frac{KQ_1}{R_1} + \frac{K(-|Q_2|)}{R_2} = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{K|Q_2|}{R_2}$$

למה הפוטנציאל קבוע בתוך קליפה?

- השדה בפנים = 0 (מחוק גאוס)
- אם אין שדה, הפוטנציאל לא משתנה
- הפוטנציאל בפנים = הפוטנציאל על הקליפה



הפרש הפוטנציאלים

$$\Delta V = V_2 - V_1 = KQ_1 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

בדיקת סימנים:

- $R_2 > R_1$ מכאן $\frac{1}{R_2} < \frac{1}{R_1}$ ← הסוגריים שליליים
- Q_1 חיובי ΔV שלילי
- אבל Q_e (אלקטרון) שלילי $\Delta V \cdot Q_e$ חיובי ✓

משוואת שימור האנרגיה

$$Q_e V_2 + \frac{1}{2}m_e v_2^2 = Q_e V_1 + \frac{1}{2}m_e v_1^2$$

אם משתחרר ממנוחה ($v_2 = 0$):

$$\frac{1}{2}m_e v_1^2 = Q_e(V_2 - V_1) = Q_e \cdot \Delta V$$

התוצאה הסופית

$$v_1^2 = \frac{2Q_e \cdot KQ_1}{m_e} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2KQ_1 Q_e}{m_e} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

חלק ג': שימור מטען חשמלי

הפוסטולט השני של האלקטרומגנטיות

מטען חשמלי אינו נברא יש מאין, ואינו מתעין אל האין

משמעות: סך המטען הכולל במערכת סגורה נשמר בזמן.

דוגמה: זוג אלקטרון-פוזיטרון

ב-PET scan:

- אלקטרון (-1.6×10^{-19} C) + פוזיטרון ($+1.6 \times 10^{-19}$ C)
- הופכים לאור (פוטונים)
- מטען התחלתי: 0
- מטען סופי: 0
- המטען נשמר! ✓

הגדרות חדשות

צפיפות מטען (ρ)

$$\rho = \rho(\vec{r}, t)$$

- שדה סקלרי

- יחידות: קולון/מ"מ"ק (C/m^3)
- יכול להשתנות במקום ובזמן

צפיפות זרם ($\vec{J}$)

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$$

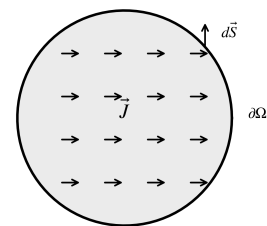
- שדה וקטורי
- $\vec{v}$ = מהירות מקומית של צפיפות המטען
- יחידות: אמפר/מ"מ"ר (A/m^2)

זרם חשמלי (I)

$$I = \oint_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

- שטף של צפיפות הזרם דרך משטח
- יחידות: אמפר (A)

צפיפות זרם וזרם חשמלי



$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

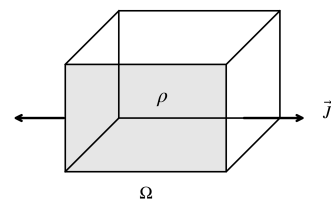
משוואת הרציפות (שימור מטען מקומי)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

או:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$$

משוואת הרציפות



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

שינוי בצפיפות = מינוס שטף היוצא

פירוש:

- השינוי בצפיפות המטען = מינוס השפיעה של הזרם
- אם מטען "בורח" מנקודה (שפיעה חיובית) → צפיפות קטנה (נגזרת שלילית)

שימור מטען גלובלי

אינטגרציה על נפח Ω :

$$\frac{dQ_{\Omega}}{dt} = -I_{\partial\Omega}$$

פירוש: קצב השינוי של המטען בנפח = מינוס הזרם היוצא דרך המעטפת

חלק ד': משוואות מקסוול

שני הפוסטולטים של האלקטרומגנטיות

פוסטולט	##
מטען חשמלי קיים וקורן את השפעתו רדיאלית למרחב	1
כמות המטען החשמלי במערכת נשמרת בזמן	2

מתוך שני הפוסטולטים האלה נבנית התורה האלקטרומגנטית כולה!

משוואת מקסוול הראשונה (חוק גאוס)

צורה דיפרנציאלית:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

צורה אינטגרלית:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\Omega}$$

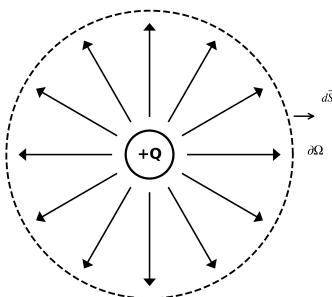
משמעות: השפיעה של שדה ההשפעה = המטען שבפנים

הקשר בין D ל-E:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

כאשר ϵ_0 = מקדם הדיאלקטרי של הריק

חוק גאוס - משוואת מקסוול הראשונה



$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{enc}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

גזירת משוואת מקסוול השנייה

שלב 1: גזירת משוואת גאוס לפי הזמן

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

שלב 2: שימוש במשוואת הרציפות

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$$

- שימור אנרגיה: $E_{K,i} + qV_i = E_{K,f} + qV_f$
- פוטנציאל הוא סקלרי - מתחבר אלגברית

פוטנציאל של קליפה כדורית

- מחוג: $V = \frac{KQ}{r}$
- בתוך: $V = \frac{KQ}{R}$ (קבוע!)

שימור מטען

- המטען הכולל נשמר
- משוואת הרציפות מבטאת זאת מקומית

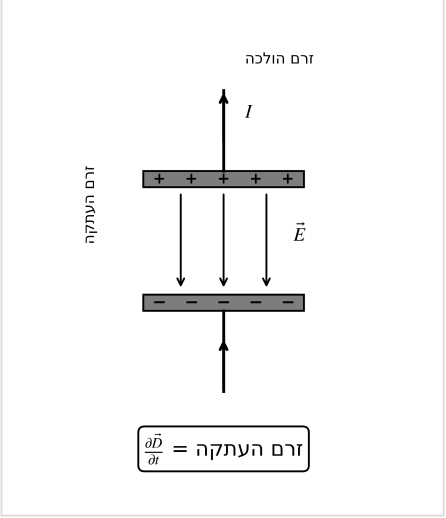
משוואות מקסוול

- נגזרות משני פוסטולטים פשוטים
- מתארות את כל התופעות האלקטרומגנטיות

קבועים חשובים

קבוע	סימון	ערך
קבוע קולון	K	$9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$
מטען אלקטרון	q_e	$-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$
מסת אלקטרון	m_e	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
מטען פרוטון	q_p	$+1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

זרם הולכה זרם העתקה



$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right) = 0$$

שלב 4: הפתרון

אם הדיברגנס של משהו = 0, אז אותו משהו הוא ערבולי (רוטור של שדה אחר):

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} = \nabla \times \vec{H}$$

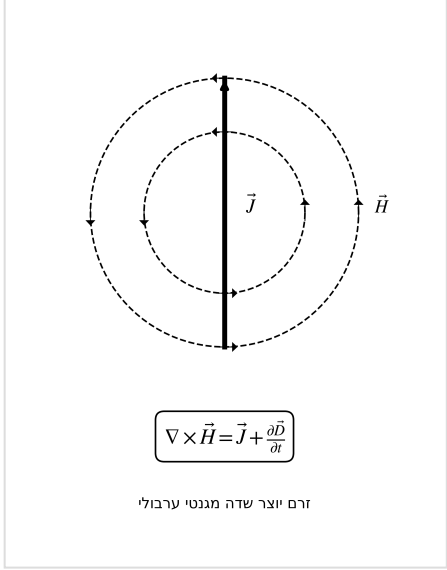
משוואת מקסוול השנייה (חוק אמפר-מקסוול)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

איבר	שם	משמעות
$\vec{J}$	צפיפות זרם	זרם הולכה
$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	זרם העתקה	שינוי בשדה החשמלי
$\vec{H}$	שדה מגנטי	השדה שנוצר

המסקנה: בכל מקום שיש זרמים חשמליים, מופיע שדה מגנטי ערבולי!

חוק אמפר-מקסוול - משוואה שנייה



סיכום - משוואות מקסוול (עד כה)

משוואה ראשונה (חוק גאוס)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

משוואה שנייה (חוק אמפר-מקסוול)

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

משוואת הרציפות (שימור מטען)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

נקודות מפתח

אנרגיה פוטנציאלית חשמלית

$$U = qV$$