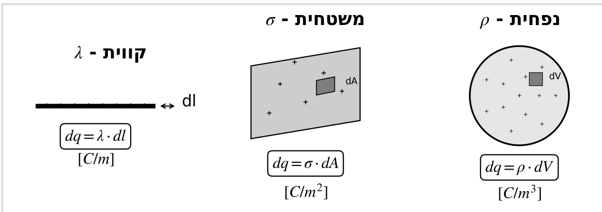
חלק א׳: קבועים ויחידות

קבועים פיזיקליים

קבוע	סימון	ערך	יחידות
קבוע קולון	k	9×10^9	$\dfrac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$
פרמיטיביות הריק	ϵ_0	8.85×10^{-12}	$\dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$
מטען אלקטרון	e	-1.6×10^{-19}	C
מטען פרוטון	e	$+1.6 \times 10^{-19}$	C

חלק ב׳: צפיפויות מטען

סוג	סימון	הגדרה	יחידות	דוגמה
קווית	λ	$\lambda = \dfrac{dq}{dl}$	C/m	תיל, טבעת, מוט
משטחית	σ	$\sigma = \dfrac{dq}{dA}$	$\mathrm{C/m^2}$	דיסקה, מישור, קליפה
נפחית	ρ	$\rho = \dfrac{dq}{dV}$	$\mathrm{C/m^3}$	כדור מלא, גליל מלא



אלמנטי מטען (dq)

$$dq = \lambda \cdot dl \quad \text{(linear)}$$
$$dq = \sigma \cdot dA \quad \text{(surface)}$$
$$dq = \rho \cdot dV \quad \text{(volume)}$$

חישוב מטען כולל

$$Q = \int_L \lambda\, dl = \iint_S \sigma\, dA = \iiint_V \rho\, dV$$

דוגמה: כדור טעון אחיד

צפיפות נפחית אחידה:

$$Q = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

דוגמה: טבעת טעונה אחידה

צפיפות קווית אחידה:

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

דוגמה: כדור עם חלל פנימי ($R_1 < r < R_2$)

צפיפות נפחית אחידה (יכולה לשמש בהמשך לצד ימין של חוק גאוס):

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3} = \frac{3Q}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

חלק ג׳: חוק קולון והשדה החשמלי

חוק קולון

כוח בין שני מטענים:

$$\boxed{\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}}$$

כאשר $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2}$

- מטענים שווי סימן ← דחייה
- מטענים הפוכי סימן ← משיכה

שדה חשמלי

שדה חשמלי ממטען נקודתי

$$\boxed{\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

עקרון הסופרפוזיציה

לשדות:

$$\vec{E}_{tot} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{Kq_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

לכוחות:

$$\vec{F}_{total} = \sum_i \vec{F}_i$$

לפוטנציאלים (סקלר - קל יותר!):

$$V_{tot} = \sum_i V_i = \sum_i \frac{Kq_i}{r_i}$$

הבדל חשוב: שדה מול פוטנציאל

מצב	שדה $\vec{E}$	פוטנציאל V
שני מטענים שווים $+q, +q$ (באמצע)	$\vec{E} = 0$ (מתקזזים)	$V = \dfrac{2Kq}{a} \neq 0$
דיפול $+q, -q$ (באמצע)	$\vec{E} \neq 0$ (מתחברים)	$V = 0$ (מתקזזים)

דוגמאות לסופרפוזיציה

דוגמה 1: משושה עם 5 מטענים

בכל אחד מ-5 קודקודי משושה נמצא מטען $+Q$. הקודקוד השישי ריק. מה השדה במרכז?

פתרון:

- משושה מלא ← השדה במרכז = 0 (סימטריה)
- משושה עם מטען חסר = משושה מלא + מטען הפוך

$$\vec{E}_5 = \vec{E}_6 + \vec{E}_{-Q} = 0 + \vec{E}_{-Q}$$

השדה במרכז כאילו יש מטען $-Q$ בקודקוד החסר:

$$E = \frac{kQ}{a^2}$$

כיוון: **לכיוון** הקודקוד הריק (כי המטען ה"חסר" שלילי)

> **דוגמה 2: משולש שווה צלעות עם 3 מטענים**
>
> שלושה מטענים $+q$ בקודקודי משולש שווה צלעות (צלע a). מה הפוטנציאל במרכז?

פתרון:

- מרחק מקודקוד למרכז: $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$
- כל מטען תורם: $V_i = \frac{Kq}{a/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}Kq}{a}$

$$\boxed{V = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}Kq}{a} = \frac{3\sqrt{3}Kq}{a}}$$

> **דוגמה 3: משולש ישר זווית**
>
> משולש ישר זווית שווה שוקיים:
>
> - קודקודים A,C: מטען $+Q$
> - קודקוד B (זווית ישרה): מטען $-Q$
> - ניצבים: $a\sqrt{2}$, יתר: $2a$

א. כוח על B:

- רכיב x: מתאפס מסימטריה
- רכיב y:

$$F_y = 2 \cdot \frac{KQ^2}{2a^2}\sin(45°) = \frac{KQ^2}{\sqrt{2}a^2}$$

$$\boxed{\vec{F}_B = \frac{KQ^2}{\sqrt{2}a^2}\hat{y}}$$

ב. אנרגיה פוטנציאלית:

$$U = U_{AB} + U_{BC} + U_{AC}$$

$$U = \frac{K(+Q)(-Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{K(-Q)(+Q)}{a\sqrt{2}} + \frac{K(+Q)(+Q)}{2a}$$

$$\boxed{U = \frac{KQ^2}{2a}(1 - 2\sqrt{2})}$$

לוח אינסופי

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$

סופרפוזיציה - שלושה לוחות

חבר את התרומה מכל לוח בכל אזור בנפרד. אם $E = 0$ באזור מסוים ← מצא יחס בין σ-ים.

הפרש פוטנציאלים בין לוחות

$$\Delta V = E \cdot d$$

חלק ד': חוק גאוס

הצורה האינטגרלית

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}}$$

הצורה הדיפרנציאלית (משוואת מקסוול 1)

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

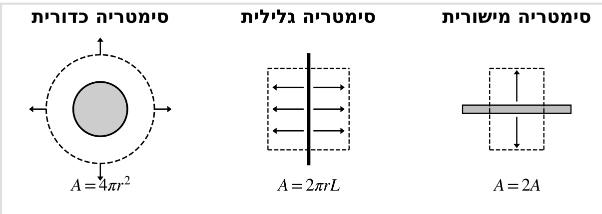
שטף חשמלי

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E\cos\theta\, dA$$

חשוב: רק הרכיב הניצב למשטח תורם!

מתי מתאים? רק עם סימטריה מתאימה

סימטריה	משטח גאוס	A
כדורית (מטען/כדור)	כדור	$4\pi r^2$
גלילית (תיל/גליל)	גליל	$2\pi rL$
מישורית (לוח)	"קופסה" (pillbox)	$2A$



שיטה - חוק גאוס

א. זהה סימטריה

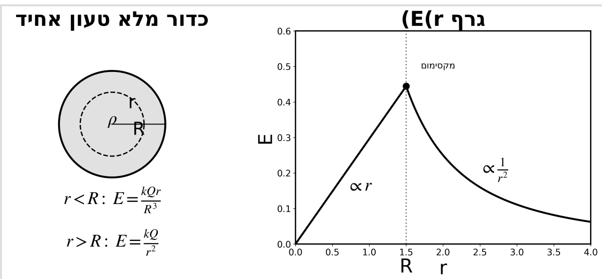
ב. בחר משטח גאוס שעליו E קבוע (או אפס)

ג. חשב Q_{enc} - **רק** המטען בתוך המשטח!

ד. פתור עבור E

דוגמאות לחוק גאוס

> **דוגמה 1: כדור מבודד טעון אחיד**
>
> כדור ברדיוס R עם צפיפות אחידה ρ. מצא את השדה.



בתוך הכדור ($r < R$):

משטח גאוס כדורי ברדיוס r - משמאל מעטפת כדורית עם שטח $4\pi r^2$ ומימין המטען הכלוא בתוכה חלקי ϵ_0:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{enc}(r)}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \cancel{4\pi} r^3}{3 \cdot \cancel{4\pi} r^2 \cdot \epsilon_0}$$

$$= \frac{r}{3\epsilon_0} \cdot \rho$$

$$\text{(using Total-}Q\text{):} \quad Q_{tot} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{3Q_{tot}}{4\pi R^3}$$

$$E = \frac{r}{3\epsilon_0} \cdot \rho = \frac{r}{3\epsilon_0} \cdot \frac{3Q_{tot}}{4\pi R^3} = \frac{Q}{4\pi}$$

$$\text{(using } K\text{):} \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = K\frac{Q_{tot} r}{R^3}$$

$$\boxed{E(r<R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = K\frac{Q_{tot} r}{R^3}}$$

הערה:

$$Q_{enc}(r) = Q_{tot}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

בגלל שהצפיפות ρ אחידה, אז המטען פרופורציונלי לנפח.

הנפח של כדור ברדיוס x הוא $\frac{4}{3}\pi x^3$. לכן:

$$Q_{enc}(r) = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad , \qquad Q_{tot} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

מחלקים אחד בשני (אותו ρ, אותו $\frac{4}{3}\pi$ מתבטלים):

$$\frac{Q_{enc}(r)}{Q_{tot}} = \frac{r^3}{R^3} = \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

ומכפילים ב-Q_{tot}:

$$Q_{enc}(r) = Q_{tot}\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

אינטואיציה: אם r הוא חצי מ-R, אז הנפח (ולכן המטען) הוא $(1/2)^3 = 1/8$ מהכול.

מחוץ לכדור ($r > R$):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

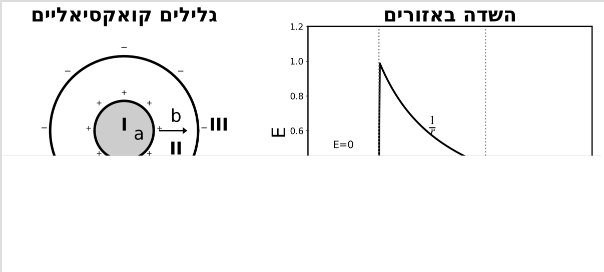
$$\boxed{E(r>R) = \frac{KQ}{r^2}}$$

מקסימום שדה על פני הכדור (בגבול $r \to R$):

$$E_{max} = \frac{KQ}{R^2}$$

דוגמה 2: גלילים קואקסיאליים

גליל פנימי ברדיוס a עם $+\lambda$, גליל חיצוני ברדיוס b מוארק.



באזור $r < a$ (בתוך מוליך):

$$E = 0$$

באזור $a < r < b$:

משטח גאוס גלילי:

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

באזור $r > b$:

המעטפת מוארקת ← נטענת ב-$-\lambda$ ← סך המטען = 0

$$\boxed{E = 0}$$

דוגמה 3: כדור עם חלל (מבודד)

כדור ברדיוס R_2 עם חלל פנימי ברדיוס R_1. מטען כולל Q.

צפיפות המטען:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{3Q}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

באזור $r < R_1$:

$$E = 0$$

באזור $R_1 < r < R_2$:

$$Q_{enc} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$

$$\boxed{E = \frac{kQ(r^3 - R_1^3)}{r^2(R_2^3 - R_1^3)}}$$

באזור $r > R_2$:

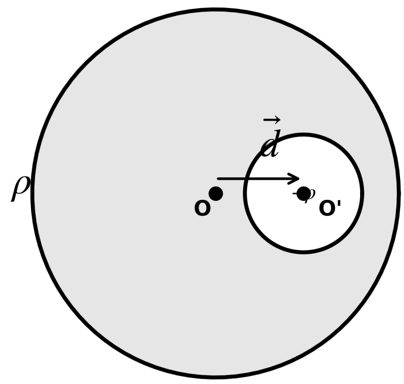
$$\boxed{E = \frac{kQ}{r^2}}$$

דוגמה 4: גליל עם חור (סופרפוזיציה)

גליל אינסופי ברדיוס a וצפיפות ρ_0. נקדח חור ברדיוס b במרחק c מהמרכז.

גליל עם חור - סופרפוזיציה

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{full} + \vec{E}_{hole}$$



בתוך החור: השדה קבוע!

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho\vec{d}}{2\varepsilon_0}}$$

רעיון: גליל עם חור = גליל מלא + גליל ״שלילי״

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_{full} + \vec{E}_{hole}$$

שדה של גליל מלא (בפנים):

$$\vec{E}_{full} = \frac{\rho_0\vec{r}}{2\epsilon_0}$$

שדה של ״גליל שלילי״:

$$\vec{E}_{hole} = -\frac{\rho_0\vec{r}\,'}{2\epsilon_0}$$

כאשר $\vec{r}\,'$ הוא וקטור המיקום ביחס למרכז החור.

בתוך החור: השדה קבוע!

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0\vec{d}}{2\epsilon_0}}$$

כאשר $\vec{d}$ הוא הוקטור ממרכז הגליל למרכז החור.

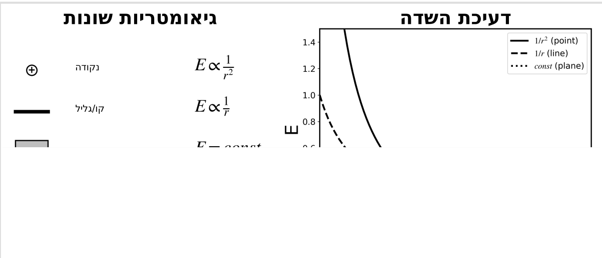
חלק ה׳: טבלת שדות

שדות של קונפיגורציות סימטריות

קונפיגורציה	שדה	הערות
מטען נקודתי	$E = \frac{KQ}{r^2}$	דועך כ-r^{-2}
משטח אינסופי	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$	קבוע!
שני משטחים (קבל)	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	בין המשטחים
תיל אינסופי	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{2K\lambda}{r}$	דועך כ-r^{-1}
גליל מלא (בפנים)	$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$	גדל לינארית
גליל מלא (בחוץ)	$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	כמו תיל
כדור מלא (בפנים)	$E = \frac{KQr}{R^3}$	גדל לינארית
כדור מלא (בחוץ)	$E = \frac{KQ}{r^2}$	כמו מטען נקודתי
קליפה כדורית (בפנים)	$E = 0$	-
קליפה כדורית (בחוץ)	$E = \frac{KQ}{r^2}$	כמו מטען נקודתי

דעיכה לפי ממד טופולוגי

מקור	$E(r)$	דעיכה
מטען נקודתי / כדור (מחוץ)	$\frac{KQ}{r^2}$	$\propto \frac{1}{r^2}$
קו / גליל (מחוץ)	$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$	$\propto \frac{1}{r}$
לוח אינסופי	$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$	**קבוע**
כדור מלא (בפנים)	$\frac{KQr}{R^3}$	$\propto r$



חלק ו׳: פוטנציאל חשמלי

הגדרות: פוטנציאל ושדה

$$V = \frac{U}{q} = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

פוטנציאל של מטען נקודתי

$$\boxed{V = \frac{kQ}{r}}$$

שים לב: $V \propto r^{-1}$, לא r^{-2} כמו השדה!

סופרפוזיציה של פוטנציאלים

$$V_{total} = \sum_i \frac{kQ_i}{r_i}$$

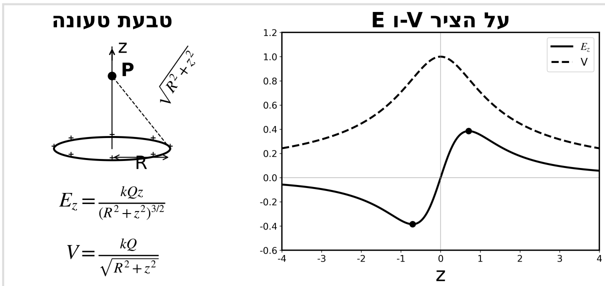
יתרון: פוטנציאל הוא סקלר - חיבור אלגברי פשוט!

טבלת פוטנציאלים

קונפיגורציה	פוטנציאל
מטען נקודתי	$V = \frac{KQ}{r}$
קליפה כדורית (בפנים)	$V = \frac{KQ}{R}$ (קבוע!)
קליפה כדורית (בחוץ)	$V = \frac{KQ}{r}$
כדור מוליך (בפנים)	$V = \frac{KQ}{R}$ (קבוע!)
טבעת (על הציר)	$V(z) = \frac{KQ}{\sqrt{R^2 + z^2}}$
גליל אינסופי	$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(r) + C$

דוגמאות לפוטנציאל

דוגמה 1: פוטנציאל של טבעת על הציר
טבעת ברדיוס R עם מטען Q. מצא את הפוטנציאל על ציר z.



פתרון:

- כל נקודה על הטבעת במרחק $\sqrt{R^2 + z^2}$ מנקודה על הציר
- המרחק קבוע ← יוצא מהאינטגרל

$$V(z) = \int \frac{k\,dq}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{k}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int dq$$

$$\boxed{V(z) = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + z^2}}}$$

דוגמה 2: טבעת עם צפיפות משתנה
טבעת עם $\lambda(\theta) = \lambda_0 \cos\theta$. מה הפוטנציאל במרכז?

פתרון:

$$V = \int \frac{k\,dq}{R} = \frac{k}{R}\int_0^{2\pi} \lambda_0 \cos\theta \cdot R\,d\theta$$

$$= k\lambda_0 \int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = k\lambda_0 \cdot 0$$

$$\boxed{V = 0}$$

הסבר: אינטגרל של $\cos\theta$ על מחזור שלם = 0

דוגמה 3: גלילים קואקסיאליים - פוטנציאל
המשך מדוגמת הגלילים הקואקסיאליים. מצא את הפוטנציאל.

באזור $r > b$:

$V = 0$ (מוארק)

באזור $a < r < b$:

$$V(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot dr = -\int_\infty^b 0\cdot dr - \int_b^r \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r'}dr'$$

$$= 0 - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}[\ln r']_b^r = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}(\ln r - \ln b)$$

$$\boxed{V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{r}}$$

באזור $r < a$: המוליך הפנימי שווה-פוטנציאל

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{a}}$$

חלק ז׳: אנרגיה ועבודה

אנרגיה פוטנציאלית

$$\boxed{U = k\frac{q_1 q_2}{r}}$$

- $U > 0$: מטענים דוחים
- $U < 0$: מטענים נמשכים

אנרגיה של מערכת מטענים

$$U_{total} = \sum_{i<j} k\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

חשוב: סכום על כל הזוגות!

עבודה

$$W = q \cdot \Delta V = q(V_f - V_i)$$

שימור אנרגיה

$$\boxed{K_i + U_i = K_f + U_f}$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + qV_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV_f$$

דוגמאות לאנרגיה

דוגמה 1: עבודה להבאת מטען

מטען q מובא מאינסוף למרכז קליפה כדורית ($-Q$, רדיוס $2R$).

פתרון:

$$W = q \cdot \Delta V = q(V_{final} - V_{initial})$$

$$V_{initial} = 0 \quad \text{(at infinity)}$$

$$V_{final} = \frac{k(-Q)}{2R} = -\frac{kQ}{2R}$$

$$\boxed{W = -\frac{kQq}{2R}}$$

משמעות: אם $q > 0$, העבודה שלילית ← המטען נמשך מעצמו

דוגמה 2: אנרגיה של משולש

שלושה מטענים $+q$ במשולש שווה צלעות. הוסף מטען Q במרכז כך ש-$U_{total} = 0$.

אנרגיה לפני:

$$U_{initial} = 3 \cdot \frac{kq^2}{a}$$

אנרגיה אחרי (3 זוגות חדשים):

$$U_{new} = 3 \cdot \frac{kQq}{a/\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}kQq}{a}$$

דרישה:

$$U_{initial} + U_{new} = 0$$

$$\frac{3kq^2}{a} + \frac{3\sqrt{3}kQq}{a} = 0$$

$$q + \sqrt{3}Q = 0$$

$$\boxed{Q = -\frac{q}{\sqrt{3}}}$$

דוגמה 3: מהירות בשימור אנרגיה

משחררים מטען $-Q$ מנקודה B במשולש ישר זווית. מה מהירותו בנקודה O (מרכז היתר)?

שימור אנרגיה:

$$U_B + 0 = U_O + \frac{1}{2}mv^2$$

$$U_B = 2 \cdot \frac{k(+Q)(-Q)}{a\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}kQ^2}{a}$$

$$U_O = 2 \cdot \frac{k(+Q)(-Q)}{a} = -\frac{2kQ^2}{a}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = U_B - U_O = -\frac{\sqrt{2}kQ^2}{a} + \frac{2kQ^2}{a} = \frac{kQ^2(2-\sqrt{\ }}{a}$$

$$\boxed{v = 2\sqrt{\frac{kQ^2(\sqrt{2}-1)}{ma}}}$$

חלק ח׳: מוליכים

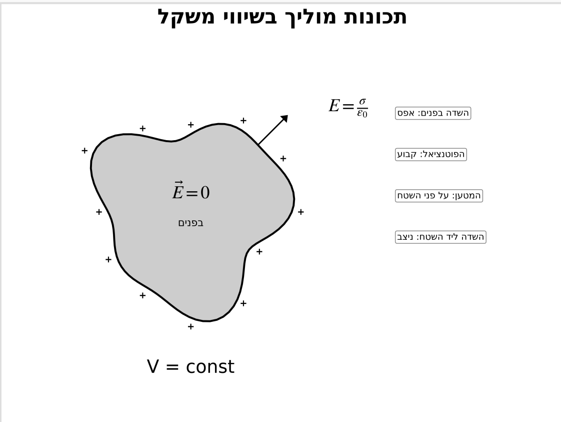
תכונות מוליך בשיווי משקל

א. **שדה בתוך מוליך:** $\vec{E} = 0$

ב. **פוטנציאל:** קבוע בכל המוליך

ג. **מטען עודף:** על פני השטח בלבד

ד. **שדה ליד פני השטח:** $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (ניצב)



הארקה

- מוליך מוארק: $V = 0$
- מטענים זורמים עד שהפוטנציאל מתאפס

דוגמאות למוליכים

דוגמה 1: קליפות קונצנטריות

כדור מוליך A (רדיוס R, מטען $+Q$) בתוך קליפה מוליכה B (רדיוס $2R$, נייטרלית).

השראה:

- צד פנימי של B: $-Q$
- צד חיצוני של B: $+Q$

פוטנציאל של A:

$$V_A = \frac{kQ}{R} + \frac{k(-Q)}{2R} + \frac{k(+Q)}{2R} = \frac{kQ}{R}$$

דוגמה 2: הארקה

מאריקים את הקליפה B מהדוגמה הקודמת.

לאחר הארקה:

- צד פנימי של B: $-Q$ (נשאר - כדי לאזן את A)
- צד חיצוני של B: 0 (מטענים נשאבו לאדמה)
- $V_B = 0$

מה הפוטנציאל של A עכשיו?

$$V_A = \frac{kQ}{R} + \frac{k(-Q)}{2R} = \frac{kQ}{2R}$$

דוגמה 3: חיבור מוליכים

מחברים שני כדורים מוליכים (רדיוסים R_1, R_2) עם מטענים Q_1, Q_2.

בשיווי משקל: $V_1 = V_2$

$$\frac{kQ_1'}{R_1} = \frac{kQ_2'}{R_2}$$

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$$

פתרון:

$$Q_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}(Q_1 + Q_2)$$

$$Q_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2}(Q_1 + Q_2)$$

חלק ט׳: אינטגרציה וחישובי שדה

שדה מהתפלגות רציפה

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \hat{R}$$

פוטנציאל מהתפלגות רציפה

$$V(\vec{r}) = k \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

דוגמאות לאינטגרציה

דוגמה 1: מוט על ציר y

מוט באורך L על ציר y השלילי (מ-$-L$ עד 0) עם צפיפות λ. שדה בנקודה $y > 0$.

אלמנט מטען:

$$dq = \lambda\, dy'$$

מרחק מאלמנט ב-y' לנקודה ב-y:

$$r = y - y'$$

שדה:

$$E = \int_{-L}^{0} \frac{k\lambda\, dy'}{(y - y')^2}$$

הצבה: $u = y - y'$, $du = -dy'$

$$E = k\lambda \left[\frac{1}{y{-}y'}\right]_{-L}^{0} = k\lambda \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y + L}\right)$$

$$\boxed{E = \frac{k\lambda L}{y(y + L)}}$$

דוגמה 2: חצי טבעת

חצי טבעת ברדיוס R עם מטען Q. שדה בראשית.

צפיפות:

$$\lambda = \frac{Q}{\pi R}$$

שדה מאלמנט:

$$dE = \frac{k\,dq}{R^2} = \frac{k\lambda R\,d\theta}{R^2} = \frac{k\lambda\,d\theta}{R}$$

סימטריה: רק רכיב x שורד

$$E_x = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{k\lambda}{R} \cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R}[\sin\theta]_{\pi/2}^{3\pi/2}$$

$$= \frac{k\lambda}{R}(-1 - 1) = -\frac{2k\lambda}{R} = -\frac{2kQ}{\pi R^2}$$

$$\boxed{E_x = -\frac{2kQ}{\pi R^2}}$$

דוגמה 3: מוט - פוטנציאל

מוט באורך $2L$ על ציר x (מ-$-L$ עד $+L$). פוטנציאל על ציר y.

$$V(y) = k\lambda \int_{-L}^{L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

אינטגרל סטנדרטי:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

$$\boxed{V(y) = k\lambda \ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + y^2}}{-L + \sqrt{L^2 + y^2}}\right)}$$

דוגמה 4: מוט עם צפיפות אי-זוגית

אותו מוט עם $\lambda(x) = \lambda_0 \sin(\pi x/L)$. פוטנציאל על ציר y?

פתרון:

$$V = k\lambda_0 \int_{-L}^{L} \frac{\sin(\pi x/L)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx$$

- $\sin(\pi x/L)$ היא פונקציה **אי-זוגית**
- $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ היא פונקציה **זוגית**
- המכפלה: **אי-זוגית**

$$\boxed{V = 0}$$

כלל: $\int_{-a}^{a} f_{odd}(x)\, dx = 0$

חלק י׳: טריקים ושיטות

1. סופרפוזיציה עם "מטען חסר"

$$\vec{E}_{missing} = \vec{E}_{full} + \vec{E}_{opposite}$$

דוגמה: טבעת עם קשת חסרה = טבעת מלאה + קשת הפוכה

2. בדיקת סימטריה

לפני חישוב - בדוק:

- אילו רכיבים מתאפסים?
- האם יש ציר/מישור סימטריה?

3. בדיקת גבולות

- $r \to 0$: התנהגות הגיונית?
- $r \to \infty$: מתנהג כמטען נקודתי?
- $r = R$: רציפות?

פוטנציאל תמיד רציף! שדה לא בהכרח רציף (קפיצה במעבר דרך משטח טעון)

4. מתי להשתמש בכל שיטה?

מצב	שיטה
סימטריה גבוהה	חוק גאוס
מטענים בדידים	סופרפוזיציה
התפלגות רציפה ללא סימטריה	אינטגרציה
חישוב פוטנציאל	עדיף - סקלר!

5. פונקציות זוגיות ואי-זוגיות

פונקציה	זוגית/אי-זוגית
$\cos\theta$	זוגית
$\sin\theta$	אי-זוגית
x, x^3	אי-זוגית
$x^2, \|x\|$	זוגית

$$\int_{-a}^{a} f_{odd}(x)\, dx = 0$$

$$\int_{-a}^{a} f_{even}(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f_{even}(x)\, dx$$

חלק יא׳: נוסחאות גיאומטריות

שטחים

צורה	שטח
עיגול	πR^2
מעטפת כדורית (שטח הפנים)	$4\pi r^2$
מעטפת גלילית (שטח הדופן בלבד - בלי בסיסים)	$2\pi r L$

נפחים

צורה	נפח
כדור	$\frac{4}{3}\pi R^3$
גליל	$\pi R^2 L$

אלמנטים אינפיניטסימליים

קרטזיות:

$$dV = dx\, dy\, dz$$

כדוריות:

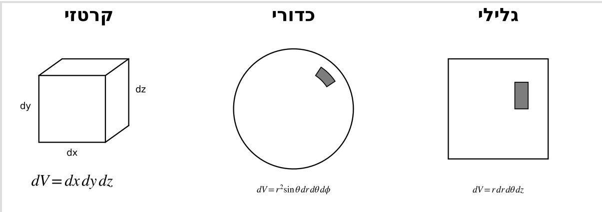
$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$dA_{sphere} = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

גליליות:

$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$dA_{cyl} = r\, d\theta\, dz$$



מרחקים מיוחדים

גיאומטריה	מרחק
אלכסון ריבוע	$d\sqrt{2}$
אלכסון קובייה	$d\sqrt{3}$
מרכז משולש שווה צלעות לקודקוד	$\frac{a}{\sqrt{3}}$

חלק יב׳: אינטגרלים שימושיים

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \frac{1}{a-x} + C$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 2$$

חלק יג׳: טריגונומטריה

זהויות בסיסיות

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

ערכים מיוחדים

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	∞

חלק יד׳: אופרטורים וקטוריים

מכפלה סקלרית

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

מכפלה וקטורית

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

- מתאפסת כשהווקטורים **מקבילים** (זווית $0°$ או $180°$), או אם אחד מהם אפס
- מקסימלית כש**הזווית** $90°$

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y}$$

גרדיאנט

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{z}$$

- מצביע לכיוון השיפוע המקסימלי
- ניצב למשטחי שווי-ערך (משטחים של פוטנציאל קבוע, משטחים של שדה חשמלי קבוע, ערך טמפרטורה קבוע וכו׳)

דיברגנס

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- מודד "מקור" או "בולען"

רוטור

$$\nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

זהויות חשובות

$$\boxed{\nabla\times(\nabla\phi) = \vec{0}}$$

$$\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0}$$

טעויות נפוצות - היזהר

א. **בלבול בין V ל-U:**
- V = פוטנציאל (של נקודה)
- U = אנרגיה פוטנציאלית (של מערכת)

ב. **שכחת הדעיכה:**
- שדה: $E\propto r^{-2}$
- פוטנציאל: $V\propto r^{-1}$

ג. **גאוס במקום לא מתאים:**
- גאוס עובד רק עם סימטריה!
- בלי סימטריה ← אינטגרל ישיר

ד. **שכחת רכיבים באינטגרל:**
- תמיד לפרק לרכיבים
- לבדוק מה מתאפס מסימטריה

ה. **שכחת ϵ_0 או k:**
- $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
- לא לערבב!

ו. **טעות בסימנים:**
- $\vec{E} = -\nabla V$ (מינוס!)
- $W = q\Delta V$ (לא $-q\Delta V$)