סיכום שיעור - טור טיילור, נקודות אקסטרמום ופיתוח

2025-01-30 21:18:36

תוכן העניינים

טור טיילור

נתבונן בביטוי הבא:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0, \xi)$$

איבר השארית

הביטוי $R_n(x, x_0, \xi)$ נקרא איבר השארית והוא מסמן את ההפרש בין הפולינום הטיילורי לפונקציה המקורית:

$$R_n(x, x_0, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0, \xi)}{(x - x_0)^n} = 0$$

$$x < \xi < x_0$$

טור מקלורן

כאשר $x_0 = 0$ נקבל טור מקלורן:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x, 0, \xi)$$

נקודת קיצון (אקסטרמום)

נניח שקיימת נקודה x_0 כך ש-$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{2n-1}(x_0) = 0$ ו-$f^{(2n)}(x_0) \neq 0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} + R_{2n}(x, x_0, \xi)$$

שכן כל האיברים עם גורם מהצורה $f^i(x_0) = 0$ יהיו 0 כאשר $1 \leq i \leq 2n-1$.

נשים לב שהביטוי $(x-x_0)^{2n}$ הוא תמיד חיובי, ולכן נקבל שאם $f^{(2n)}(x_0) > 0$ אז $f(x) > f(x_0)$. זאת בגלל שהערך של השארית זניח, כך שאם שהפונקציה שווה ל-$f(x_0)$ פלוס מספר חיובי (קטן), הערך שלה גדול מ-$f(x_0)$.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{<f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}}_{+} + \underbrace{R_{2n}(x, x_0, \xi)}_{\approx 0}$$

באופן דומה, אם $f^{(2n)}(x_0) < 0$ אז $f(x) < f(x_0)$.

מסקנה: מכאן נקבל שאם $f^{(2n)}(x_0) > 0$ אז $f(x_0)$ נקודת מינימום מקומית, ואם $f^{(2n)}(x_0) < 0$ אז נקודת מקסימום מקומית.

הרעיון למעשה מרחיב את בחינת הנגזרת השנייה לנגזרות גבוהות יותר - הנגזרת הראשונה מסדר זוגי שאינה מתאפסת, ומאפשר לנו לקבוע את סוג הנקודה בצורה יותר מדויקת.

אפשר גם לנסח את התובנה כקריטריון לנקודת קיצון: נבחן את הנגזרת הזוגית הגבוהה הראשונה של הפונקציה בנקודה x_0 שאינה מתאפסת - אם היא חיובית אז נקודת מינימום, ואם היא שלילית אז נקודת מקסימום.

דוגמה $f(x) = x^x$

נחשב את הנגזרות הראשוניות של $f(x)$. אנחנו לא יודעים לעשות זאת, אז נוכל להשתמש בטכניקה הבאה: נוציא ln משני הצדדים ונשתמש בחוק החזקות של הלוגריתם:

$$\ln(f(x)) = \ln(x^x) = x\ln(x)$$

כלומר:

$$\ln(f(x)) = x\ln(x)$$

נגזור את שני הצדדים ביחס ל-x.

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(f(x))\right) = \frac{d}{dx}\left(x\ln(x)\right)$$

בצד ימין נקבל:

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln(x)\right) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

בצד שמאל נעזר בכלל השרשרת: $\frac{d}{dx}\left(\ln(f(x))\right)=\frac{f'(x)}{f(x)}$. נקבל:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(x)+1$$

נכפיל כאת את שני הצדדים ב-$f(x)$ ונקבל:

$$f'(x)=f(x)(\ln(x)+1)$$

לסיום נציב את $f(x)=x^x$:

$$\boxed{f'(x)=x^x(\ln(x)+1)}$$

בכתיב מקוצר יותר (כמו בשיעור):

$$\ln f=x\ln x\Rightarrow\frac{f'}{f}=\ln x+1\Rightarrow f'=f(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

נחזור לבחינת נקודות הקיצור. נדרוש כי $f'(x)=x^x(\ln x+1)=0$. זה מתקיים כאשר $\ln x=-1$, כלומר $x_0=e^{-1}$.

נחשב את הנגזרת השנייה של $f(x)$:

$$\begin{aligned}f''(x)&=\left(x^x\right)'(\ln x+1)+x^x\cdot(\ln x+1)'\\&=x^x(\ln x+1)^2+\frac{x^x}{x}\\&=\boxed{x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)}\end{aligned}$$

האם $x_0=e^{-1}$ נקודת קיצון? נחשב את $f''\left(x_0\right)$:

- אם הנגזרת השנייה תתאפס בנקודה זו, נצטרך לגזור פעם נוספת ועוד פעם נוספת (לקבל נגזרת זוגית).
- אם זה לא יתאפס, נצטרך לבדוק אם גדול מאפס או קטן מאפס.

נציב את $x_0=e^{-1}$ בנגזרת השנייה:

$$\begin{aligned}f''(e^{-1})&=\left(e^{-1}\right)^{\left(e^{-1}\right)}\left((\overbrace{\ln e^{-1}}^{-1}+1)^2+\frac{1}{e^{-1}}\right)\\&=\left(e^{-1}\right)^{\left(e^{-1}\right)}\left(0^2+e\right)>0\end{aligned}$$

התאפסות ראשונה בנגזרת אי-זוגית

במקרה שהנגזרת הראשונה שמתאפסת היא דווקא מסדר אי-זוגי.

נניח שקיימת נקודה x_0 שעבודה:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots f^{(2n)}\left(x_0\right)=0,f^{(2n+1)}\neq 0$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}}_{\text{important}} + R_{2n+1}(x, x_0, \xi)$$

נפריד לשני מקרים ושני תתי מקרים בכל אחד מהם:

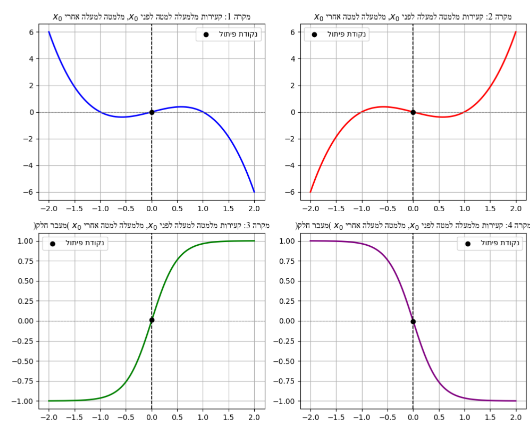
$$x > x_0 \Rightarrow (x-x_0)^{2n+1} > 0 \begin{cases} f^{(2n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ f^{(2n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

נתבונן במקרה השני:

$$x < x_0 \Rightarrow (x-x_0)^{2n+1} < 0 \begin{cases} f^{(2n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ f^{(2n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

נקודות פיתול נקודת פיתול היא נקודה שבה **הפונקציה משנה את כיוון הקעירות שלה**: מקעורה לקמורה או להפוך.

יש ארבע אפשרויות למקרה של נקודת פיתול (הנגזרת הראשונה שאינה מתאפסת אי-זוגית):



איור 1: טבלת נקודות פיתול

1. x_0 **קטנה מ-** x **והנגזרת חיובית**
   - כלומר $f(x) > f(x_0)$ עבור $x > x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 1** (גרף בצורת "S" מוטה ימינה: $f(x) = -x^3 + 0.5x$).
2. x_0 **קטנה מ-** x **והנגזרת שלילית**
   - כלומר $f(x) < f(x_0)$ עבור $x > x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 2** (גרף בצורת "S" מוטה שמאלה: $f(x) = x^3 - 0.5x$).
3. x_0 **גדולה מ-** x **והנגזרת חיובית**
   - כלומר $f(x) < f(x_0)$ עבור $x < x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 3** (גרף בצורת טאנש: $f(x) = \tanh(x)$).
4. x_0 **גדולה מ-** x **והנגזרת שלילית**
   - כלומר $f(x) > f(x_0)$ עבור $x < x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 4** (גרף בצורת טאנש הפוך: $f(x) = -\tanh(x)$).

צורת הגרף	פונקציה לדוגמה	תיאור	מספר מקרה
דומה לאות "S" מוטה ימינה	$f(x) = -x^3 + 0.5x$	x_0 קטן מ- x והנגזרת חיובית. קעירות מלמעלה כלפי מטה לפני x_0, קעירות מלמטה כלפי מעלה אחרי x_0.	**1**
דומה לאות "S" מוטה שמאלה	$f(x) = x^3 - 0.5x$	x_0 קטן מ- x והנגזרת שלילית. קעירות מלמטה כלפי מעלה לפני x_0, קעירות מלמעלה כלפי מטה אחרי x_0.	**2**
גרף חלק דמוי פונקציית טאנש	$f(x) = \tanh(x)$	x_0 גדול מ- x והנגזרת חיובית. קעירות מלמטה כלפי מעלה לפני x_0, קעירות מלמעלה כלפי מטה אחרי x_0, בצורה הדרגתית יותר.	**3**
גרף חלק דמוי פונקציית טאנש הפוכה	$f(x) = -\tanh(x)$	x_0 גדול מ- x והנגזרת שלילית. קעירות מלמעלה כלפי מטה לפני x_0, קעירות מלמטה כלפי מעלה אחרי x_0, בצורה הדרגתית יותר.	**4**

תרגול

7. סדר ראשון בפיתוח לטור חזקות יכול להיראות גם כך: $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \cdots$

הערה: סימון ברור יותר יהיה $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \cdots$

1. למה ומדוע?
2. היעזרו בקשר הנ"ל וחשבו בקירוב את $\sqrt[3]{25}$
3. וגם $\ln 1.12$

הצורה המוכרת נראית כך:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + (R)$$

נסמן $x = x_0 + \Delta x$, ונקבל:

$$x = x_0 + \Delta x$$
$$x - x_0 = \Delta x$$

נציב במקום $(x - x_0)$ את Δx ואת $x + \Delta x$ במקום x:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + \cdots$$

נעביר את $f(x_0)$ לצד שמאל:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + \cdots \blacksquare$$

כדי לחשב את $\sqrt[3]{25}$ נמצא נקודה x_0 נוחה, כדי שנוכל לחשב את הנגזרת הראשונה והשנייה שלה בקלות.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$x_0 = 27, \Delta x = -2$$

$$\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{27} = (\sqrt[3]{x})'|_{x=27}(-2) + \frac{(\sqrt[3]{x})''}{2}|_{x=27}(-2)^2 + \cdots$$

$$\sqrt[3]{25} - 3 = \frac{1}{3}\underbrace{27^{-\frac{2}{3}}}_{=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{1}{9}}(-2) + \underbrace{\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(27^{-\frac{5}{3}}\right)}{2}}_{\text{very small number}\approx 0} + \cdots$$

$$\sqrt[3]{25} \approx 3 - \frac{2}{27} \approx \boxed{\frac{25}{27}} \blacksquare$$

נפעל באופן דומה - נגדיר:

$$f(x) = \ln x$$

$$x_0 = 1$$

$$\Delta x = 0.12$$

$$\ln(1.12) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \frac{1}{x}|_{x=1}(0.12) - \frac{1}{x^2}|_{x=1}\frac{(0.12)^2}{2} + \cdots$$

$$\ln(1.12) \approx 0.12 - \frac{0.12^2}{2}$$

$$\approx 0.12 - 0.0144$$

$$\approx \boxed{0.11} \blacksquare$$

---

8. אנליזה

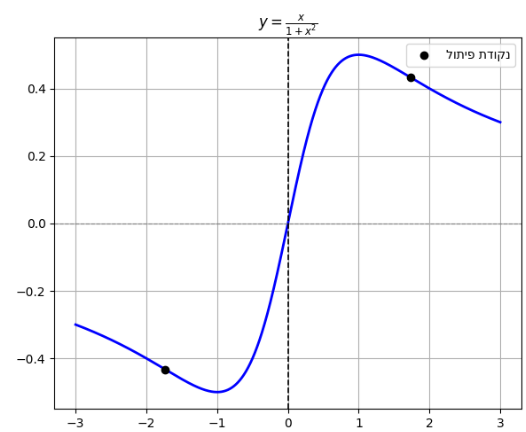
מצאו את כל נקודות האקסטרמום (מינימום מקומי, מקסימום מקומי, פיתול אופקי, פיתול משופע) של הפונקציות הבאות (אם יש כאלו), והביאו את ערכי הפונקציה בנקודות אלו. אם מדובר בנקודות פיתול, נסו לסווג אותן (ייתכנו שני סוגי פיתול אופקי וארבעה סוגי פיתול משופע) חשבו גם את $\lim_{x\to -1^+} g(x)$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)(1-x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{-2x(1+x^2)(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{-2x(1+x^2)(3-x^2)}{(1+x^2)^4} \\
f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

x	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-0+$	$+$	$+0-$	$-$	$-0+$
סיווג	פיתול משופעת	נקודת מינימום	פיתול משופעת	נקודת מקסימום	פיתול משופעת



איור 2: גרף הפונקציה

$f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x - \sin(x) - x\cos(x) + \sin(x) \\
&= x(2-\cos(x)) \\
f'(x) &= 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0\,,\ f'(0^-) < 0\,,\ f'(0^+) > 0}
\end{aligned}$$

$$f''(x) = 2 - \cos(x) + x\sin(x)$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\cos(x) - 2}{\sin(x)}$$

הפעם יותר נוח לנו להסתכל על הגרפים: באפשר להסיק שנקודת x=0 היא נקודת מינימום

שהרי כבר מצאנו מסימני נגזרת ראשונה שזוהי נקודת מינימום

ניתן להבחין שהפונקציה את הנגזרת השנייה

$$2 - \cos(x) + x\sin(x)$$

כך שהתשובה לשאלה אינה יודעת לספק טווחים שיגדירו לנו שהנגזרת השנייה

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot x - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-x^2(-1)x^{-2} - (1 - \ln(x))2x}{x^4} \\ &= \frac{-(3 + \ln(x))}{x^3} \\ &= 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

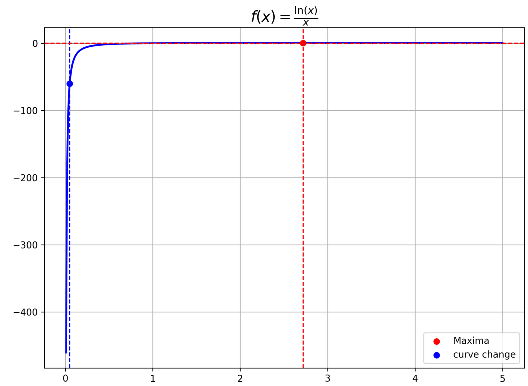
x	$1/e^3$	e
$f'(x)$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$
סיווג	מקסימום נקודת	מינימום נקודת

$g(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$ נפשט את הביטוי:

$$f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 3x^{-1} - x^{-3}$$

$$f'(x) = -3x^{-2} + 3x^{-4} = 3x^{-4}(1 - x^2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$$



איור 3: גרף הפונקציה

$$f''(x) = 6x^{-3} - 12x^{-5} = 6x^{-5}(2 - x^2)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

x	$-\sqrt{2}$	-1	1	$\sqrt{2}$
$f'(x)$	$-$	0	0	$-$
$f''(x)$	$+0-$	$-$	$+$	$+0-$
סיווג	משופעת פיתול	מקסימום נקודת	מינימום נקודת	משופעת פיתול

$g(x) = 10\log(x+1)^{\log(x+1)^{(x+1)}}$ **עטקב** $-1 < x \leq 1$ רמז: פשוט קודם לדן את הביטוי באגף ימין.

$$\begin{aligned} g(x) &= 10\log(x+1)^{\log(x+1)^{(x+1)}} \\ &= 10\log(x+1)^{(x+1)} \cdot \ln(x+1) \end{aligned}$$

חזקה הוצאת

$$= 10(x+1)\log^2(x+1)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 10\log^2(x+1) + 10(x+1)\cdot 2\log(x+1)\frac{1}{x+1} \\ &= 10\log(x+1)(\log(x+1)+2) \\ &= 0 \Leftrightarrow \log(x+1) = 0 \text{ או } \log(x+1) = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

$$\Rightarrow x+1 = e^{-2} \Leftrightarrow \boxed{x = -1 + \frac{1}{e^2}}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{20}{x+1} + \frac{20}{x+1} \\ &= \frac{20}{x+1}(1+\log(x+1)) \end{aligned}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x+1) = -1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \boxed{x = -1 + \frac{1}{e}}$$

x	$-1+\frac{1}{e^2}$	$-1+\frac{1}{e}$	0
$g'(x)$	0	$-$	0
$g''(x)$	$-$	$-0+$	$+$
סיווג	נקודת מקסימום	פיתול משופעת	נקודת מינימום