נקודות אקסטרמום ופיתוח

21:18:36 2025-01-30

תוכן העניינים

נקודת קיצון (אקסטרמום)

נניח שקיימת נקודה x_0 כך ש-$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{2n-1}(x_0) = 0$ ו-$f^{(2n)}(x_0) \neq 0$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} + R_{2n}(x, x_0, \xi)$$

שכן כל האיברים עם גורם מהצורה $f^i(x_0) = 0$ יהיו 0 כאשר $1 \leq i \leq 2n-1$.

נשים לב שהביטוי $(x-x_0)^{2n}$ הוא תמיד חיובי, ולכן נקבל שאם $f^{(2n)}(x_0) > 0$ אז $f(x) > f(x_0)$. זאת בגלל שהערך של השארית זניח, כך שאם שהפונקציה שווה ל-$f(x_0)$ פלוס מספר חיובי (קטן), הערך שלה גדול מ-$f(x_0)$.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{<f(x)} + \underbrace{\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}}_{+} + \underbrace{R_{2n}(x, x_0, \xi)}_{\approx 0}$$

באופן דומה, אם $f^{(2n)}(x_0) < 0$ אז $f(x) < f(x_0)$.

מסקנה: מכאן נקבל שאם $f^{(2n)}(x_0) > 0$ אז $f(x_0)$ נקודת מינימום מקומית, ואם $f^{(2n)}(x_0) < 0$ אז נקודת מקסימום מקומית.

הרעיון למעשה מרחיב את בחינת הנגזרת השנייה לנגזרות גבוהות יותר - הנגזרת הראשונה מסדר זוגי שאינה מתאפסת, ומאפשר לנו לקבוע את סוג הנקודה בצורה יותר מדויקת.

אפשר גם לנסח את התובנה כקריטריון לנקודת קיצון: נבחן את הנגזרת הזוגית הגבוהה הראשונה של הפונקציה בנקודה x_0 שאינה מתאפסת - אם היא חיובית אז נקודת מינימום, ואם היא שלילית אז נקודת מקסימום.

דוגמה $f(x) = x^x$

נחשב את הנגזרות הראשוניות של $f(x)$. אנחנו לא יודעים לעשות זאת, אז נוכל להשתמש בטכניקה הבאה: נוציא ln משני הצדדים ונשתמש בחוק החזקות של הלוגריתם:

$$\ln(f(x)) = \ln(x^x) = x\ln(x)$$

כלומר:

$$\ln(f(x)) = x\ln(x)$$

נגזור את שני הצדדים ביחס ל-x.

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(f(x))\right) = \frac{d}{dx}\left(x\ln(x)\right)$$

בצד ימין נקבל:

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln(x)\right) = 1\cdot\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x} = \ln(x)+1$$

בצד שמאל נעזר בכלל השרשרת: $\frac{d}{dx}\left(\ln(f(x))\right) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. נקבל:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x)+1$$

נכפיל כאת את שני הצדדים ב-$f(x)$ ונקבל:

$$f'(x) = f(x)(\ln(x)+1)$$

לסיום נציב את $f(x) = x^x$:

$$\boxed{f'(x) = x^x(\ln(x)+1)}$$

בכתיב מקוצר יותר (כמו בשיעור):

$$\ln f = x\ln x \Rightarrow \frac{f'}{f} = \ln x + 1 \Rightarrow f' = f(\ln x+1) = x^x(\ln x+1)$$

נחזור לבחינת נקודות הקיצור. נדרוש כי $f'(x) = x^x(\ln x+1) = 0$. זה מתקיים כאשר $\ln x = -1$, כלומר $x_0 = e^{-1}$.

נחשב את הנגזרת השנייה של $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (x^x)'(\ln x+1) + x^x \cdot (\ln x+1)' \\
&= x^x(\ln x+1)^2 + \frac{x^x}{x} \\
&= \boxed{x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)}
\end{aligned}
$$

האם $x_0 = e^{-1}$ נקודת קיצון? נחשב את $f''(x_0)$:

- אם הנגזרת השנייה תתאפס בנקודה זו, נצטרך לגזור פעם נוספת ועוד פעם נוספת (לקבל **נגזרת זוגית**.)
- אם זה לא יתאפס, נצטרך לבדוק אם גדול מאפס או קטן מאפס.

נציב את $x_0 = e^{-1}$ בנגזרת השנייה:

$$
\begin{aligned}
f''(e^{-1}) &= (e^{-1})^{(e^{-1})}\left((\overbrace{\ln e^{-1}}^{-1}+1)^2+\frac{1}{e^{-1}}\right) \\
&= (e^{-1})^{(e^{-1})}(0^2+e) > 0
\end{aligned}
$$

התאפסות ראשונה בנגזרת אי-זוגית

במקרה שהנגזרת הראשונה שמתאפסת היא דווקא מסדר אי-זוגי.

נניח שקיימת נקודה x_0 שעבורה:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots f^{(2n)}(x_0) = 0, f^{(2n+1)} \neq 0$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n+1)!}(x-x_0)^{2n+1}}_{\text{important}} + R_{2n+1}(x, x_0, \xi)$$

נפריד לשני מקרים ושני תתי מקרים בכל אחד מהם:

$$x > x_0 \Rightarrow (x-x_0)^{2n+1} > 0 \begin{cases} f^{(2n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ f^{(2n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

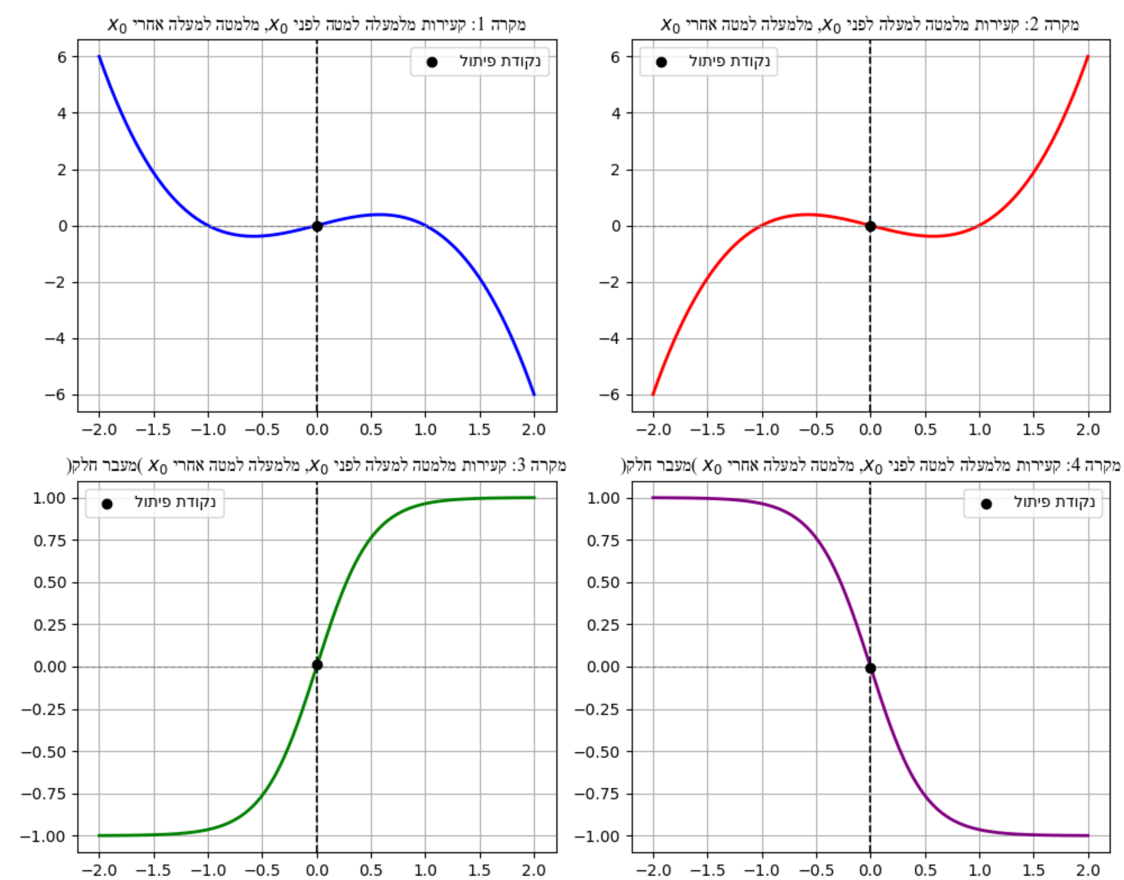
נתבונן במקרה השני:

$$x < x_0 \Rightarrow (x-x_0)^{2n+1} < 0 \begin{cases} f^{(2n+1)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ f^{(2n+1)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

נקודות פיתול

נקודת פיתול היא נקודה שבה **הפונקציה משנה את כיוון הקעירות שלה**: מקעורה לקמורה או להפוך.

יש ארבע אפשרויות למקרה של נקודת פיתול (הנגזרת הראשונה שאינה מתאפסת אי-זוגית):



טבלת נקודות פיתול

1. **x_0 קטנה מ- x והנגזרת חיובית**
   - כלומר $f(x) > f(x_0)$ עבור $x > x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 1** (גרף בצורת "S" מוטה ימינה: $f(x) = -x^3 + 0.5x$).
2. **x_0 קטנה מ- x והנגזרת שלילית**
   - כלומר $f(x) < f(x_0)$ עבור $x > x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 2** (גרף בצורת "S" מוטה שמאלה: $f(x) = x^3 - 0.5x$).
3. **x_0 גדולה מ- x והנגזרת חיובית**
   - כלומר $f(x) < f(x_0)$ עבור $x < x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מעלה לקעירות כלפי מטה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 3** (גרף בצורת טאנש: $f(x) = \tanh(x)$).
4. **x_0 גדולה מ- x והנגזרת שלילית**
   - כלומר $f(x) > f(x_0)$ עבור $x < x_0$, מה שמצביע על מעבר **מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה**.
   - זה מתאים ל**מקרה 4** (גרף בצורת טאנש הפוך: $f(x) = -\tanh(x)$).

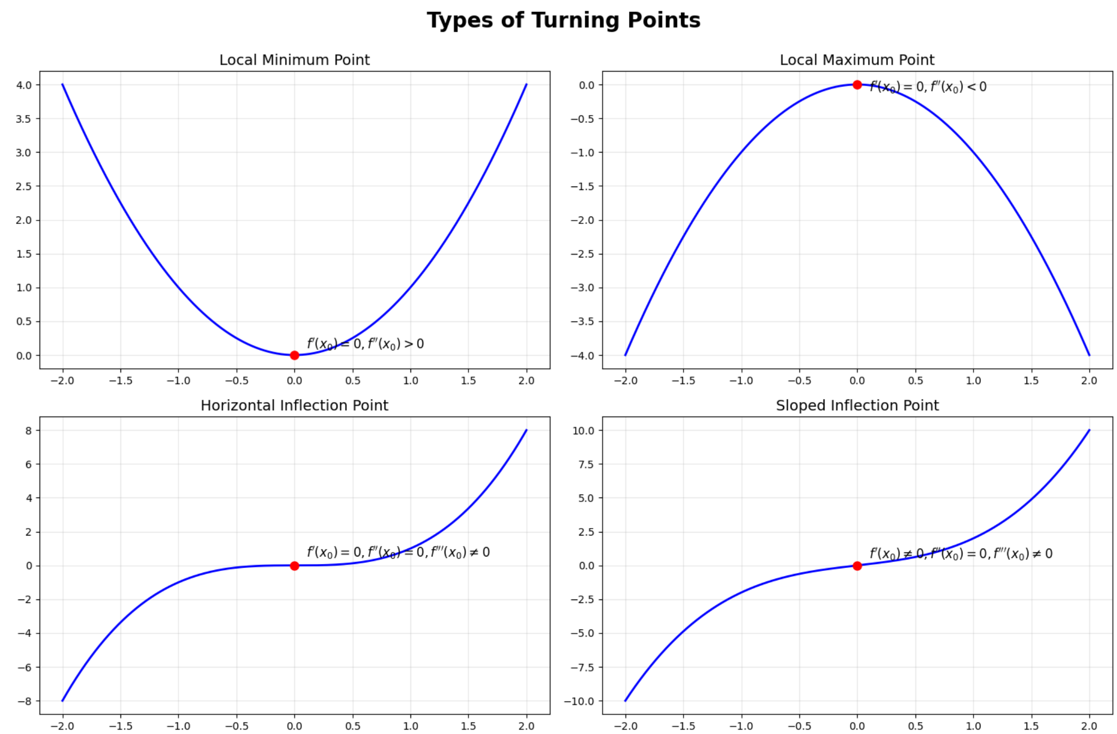
צורת הגרף	פונקציה לדוגמה	תיאור	מספר מקרה
דומה לאות "S" מוטה ימינה	$f(x) = -x^3 + 0.5x$	x_0 קטן מ- x והנגזרת חיובית. קעירות מלמעלה כלפי מטה לפני x_0, קעירות מלמטה כלפי מעלה אחרי x_0.	**1**
דומה לאות "S" מוטה שמאלה	$f(x) = x^3 - 0.5x$	x_0 קטן מ- x והנגזרת שלילית. קעירות מלמטה כלפי מעלה לפני x_0, קעירות מלמעלה כלפי מטה אחרי x_0.	**2**
גרף חלק דמוי פונקציית טאנש	$f(x) = \tanh(x)$	x_0 גדול מ- x והנגזרת חיובית. קעירות מלמטה כלפי מעלה לפני x_0, קעירות מלמעלה כלפי מטה אחרי x_0, בצורה הדרגתית יותר.	**3**
גרף חלק דמוי פונקציית טאנש הפוכה	$f(x) = -\tanh(x)$	x_0 גדול מ- x והנגזרת שלילית. קעירות מלמעלה כלפי מטה לפני x_0, קעירות מלמטה כלפי מעלה אחרי x_0, בצורה הדרגתית יותר.	**4**

הרחבה לגבי נקודות מפנה

החלק הבא נכתב לפי המסמך "משפטי נקודות מפנה" שהועלה לאתר הקורס ועשוי לכלול תוכן רלוונטי נוסף לבחינה.

סוגי נקודות מפנה

מאפיינים	תיאור	סוג הנקודה
הנגזרת הראשונה מתאפסת	נקודות בהן פונקציה עוברת ממצב של עלייה למצב של ירידה (מקסימום מקומי) או ממצב של ירידה למצב של עלייה (מינימום מקומי)	**נקודות קיצון מקומיות**
הנגזרת הראשונה והשנייה מתאפסות	נקודות בהן הפונקציה משנה את קעירותה (מקעור לקמור או להיפך) והמשיק בנקודה זו הוא אופקי	**נקודות פיתול אופקיות**
הנגזרת השנייה מתאפסת אך הראשונה לא	נקודות בהן הפונקציה משנה את קעירותה והמשיק בנקודה זו הוא משופע	**נקודות פיתול משופעות**



סוגי נקודות מפנה

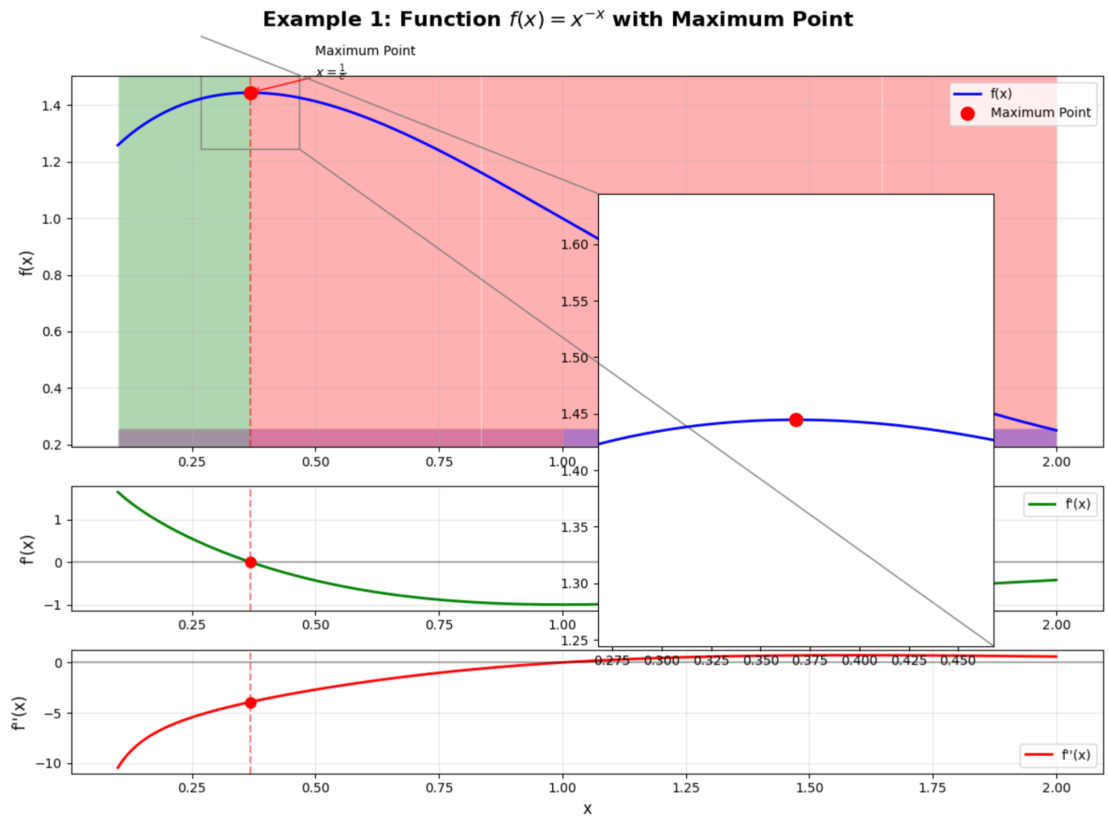
המשפטים העיקריים

1. משפט נקודות הקיצון תהא $f(x)$ פונקציה הניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב הנקודה $x = x_0$. אם בנקודה זו:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(2n)}(x_0) \neq 0$$

אז:

- אם $f^{(2n)}(x_0) > 0$ יש לפונקציה $f(x)$ **מינימום מקומי** בנקודה $x = x_0$
- אם $f^{(2n)}(x_0) < 0$ יש לפונקציה $f(x)$ **מקסימום מקומי** בנקודה $x = x_0$



$$f(x) = x^{-x}$$

למציאת נקודות קיצון:

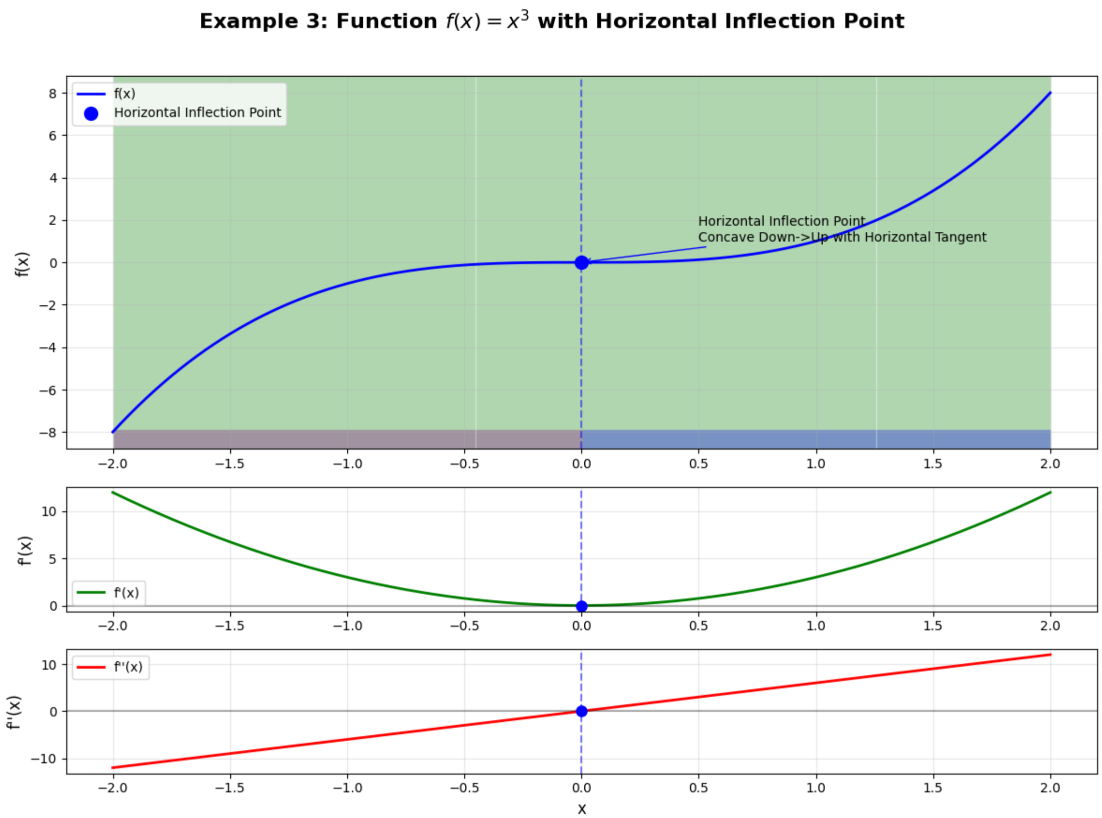
1. בודקים מתי מתקיים $f'(x) = 0$ לקבלת נקודות חשודות.
2. בודקים את הנגזרת השנייה בנקודות החשודות:
   - אם $f''(x_0) > 0$ יש **מינימום**
   - אם $f''(x_0) < 0$ יש **מקסימום**
   - אם $f''(x_0) = 0$ צריך לבדוק נגזרות גבוהות יותר

2. משפט הפיתול האופקי תהא $f(x)$ פונקציה הניתנת לפיתוח לטור חזקות סביב הנקודה $x = x_0$. אם בנקודה זו:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$$

אז:

- אם $f^{(2n+1)}(x_0) < 0$ יש לפונקציה נקודת פיתול בעלת משיק אופקי בנקודה $x = x_0$ והיא **יורדת** בסביבה זו
- אם $f^{(2n+1)}(x_0) > 0$ יש לפונקציה נקודת פיתול בעלת משיק אופקי בנקודה $x = x_0$ והיא **עולה** בסביבה זו



$f(x) = x^3$

3. משפט הפיתול המשופע

תהא $f(x)$ פונקציה, ותהא $f'(x)$ פונקציית השיפוע שלה, כך ש- $f'(x_0) \neq 0$. נקודות הקיצון של $f'(x)$ הן נקודות הפיתול המשופעות של $f(x)$.

המקרים האפשריים:

- אם $f' > 0$ בסביבת x_0, והנקודה היא מינימום של f': הפונקציה עוברת ממצב קמור למצב קעור בשיפוע חיובי
- אם $f' > 0$ בסביבת x_0, והנקודה היא מקסימום של f': הפונקציה עוברת ממצב קעור למצב קמור בשיפוע חיובי
- אם $f' < 0$ בסביבת x_0, והנקודה היא מינימום של f': הפונקציה עוברת ממצב קמור למצב קעור בשיפוע שלילי
- אם $f' < 0$ בסביבת x_0, והנקודה היא מקסימום של f': הפונקציה עוברת ממצב קעור למצב קמור בשיפוע שלילי

דוגמאות

דוגמה 1: מציאת נקודות קיצון של $f(x) = x^{-x}$ **(מוגדרת לכל** $x > 0$)

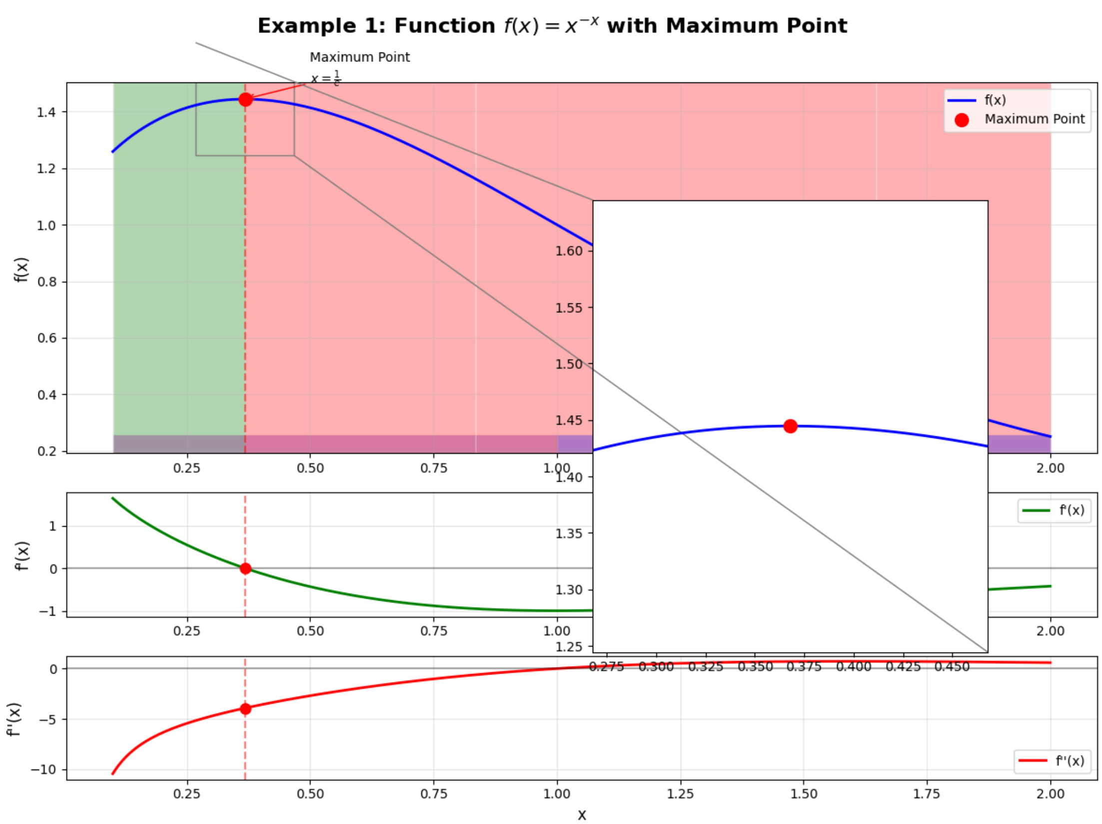
1. נגזור ונשווה לאפס:

$$f'(x) = (-\ln x - 1)x^{-x} = 0 \implies \ln x_0 = -1 \implies x_0 = \frac{1}{e}$$

2. בדיקת הנגזרת השנייה:

$$f''(\frac{1}{e}) < 0$$

3. מסקנה: יש נקודת **מקסימום מקומי** ב $x = \frac{1}{e}$ וערך הפונקציה בנקודה זו: $f(\frac{1}{e}) = \sqrt[e]{e}$



$f(x) = x^{-x}$

דוגמה 2: מציאת נקודת פיתול משופעת עבור $f(x) = x^3 - 3x^2$

1. נגזרת ראשונה:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

2. נגזרת שנייה (לאפס אותה למציאת נקודות פיתול):

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \implies x_0 = 1$$

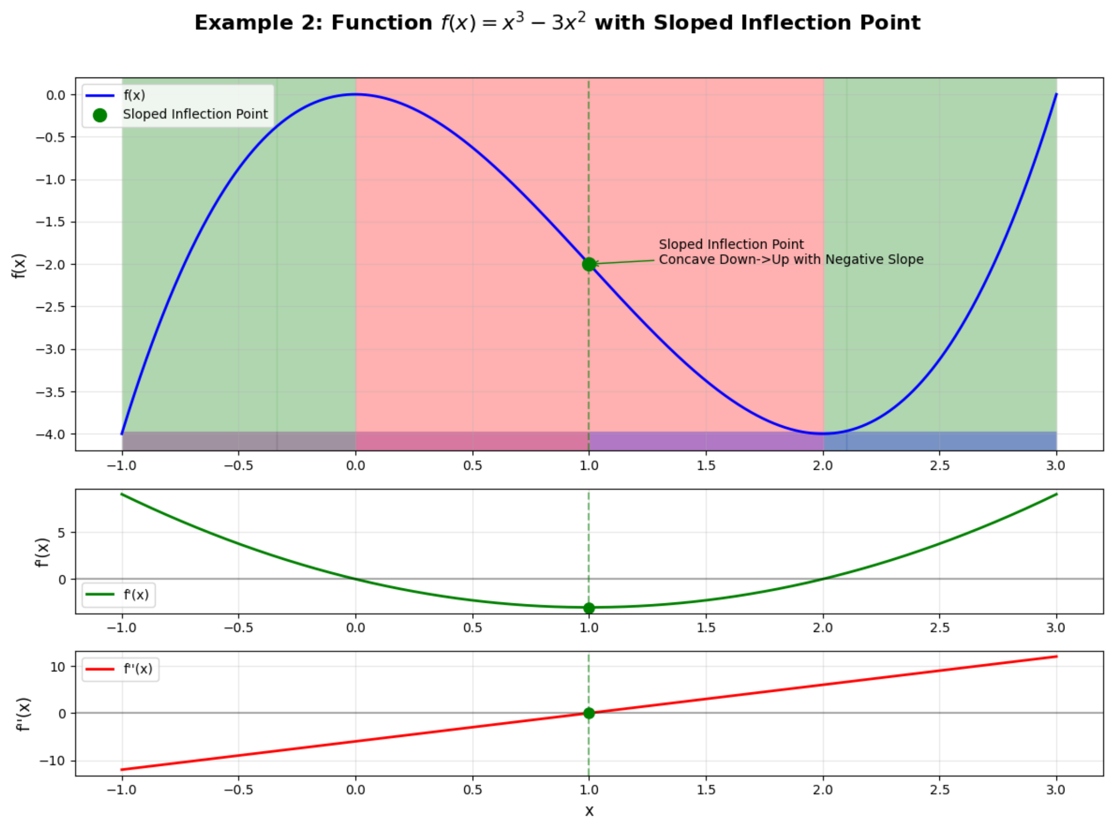
3. בדיקת השיפוע בנקודה:

$$f'(1) = -3 < 0 \implies \text{Negative slope}$$

4. בדיקת הנגזרת השלישית:

$$f'''(1) = 6 > 0 \implies \text{A min of } f'$$

5. מסקנה: בנקודה $x = 1$ יש **נקודת פיתול משופעת** שבה הפונקציה עוברת ממצב קמור למצב קעור בשיפוע שלילי.



$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

טיפים למציאת נקודות מפנה

1. לנקודות קיצון:
   - אפס את הנגזרת הראשונה
   - בדוק את סימן הנגזרת השנייה
2. לנקודות פיתול:
   - אפס את הנגזרת השנייה
   - בדוק את סוג המעבר (קמור לקעור או להיפך)
   - בדוק אם המשיק אופקי (הנגזרת הראשונה מתאפסת) או משופע
3. כאשר יש אי-ודאות (הנגזרת השנייה מתאפסת בנקודת קיצון), יש לבדוק נגזרות מסדר גבוה יותר לפי המשפטים שלמדנו.