# טורי חזקות - תרגילים ופתרונות

M8 - טורי חזקות ונקודות מפנה

2025-02-27 16:32:27

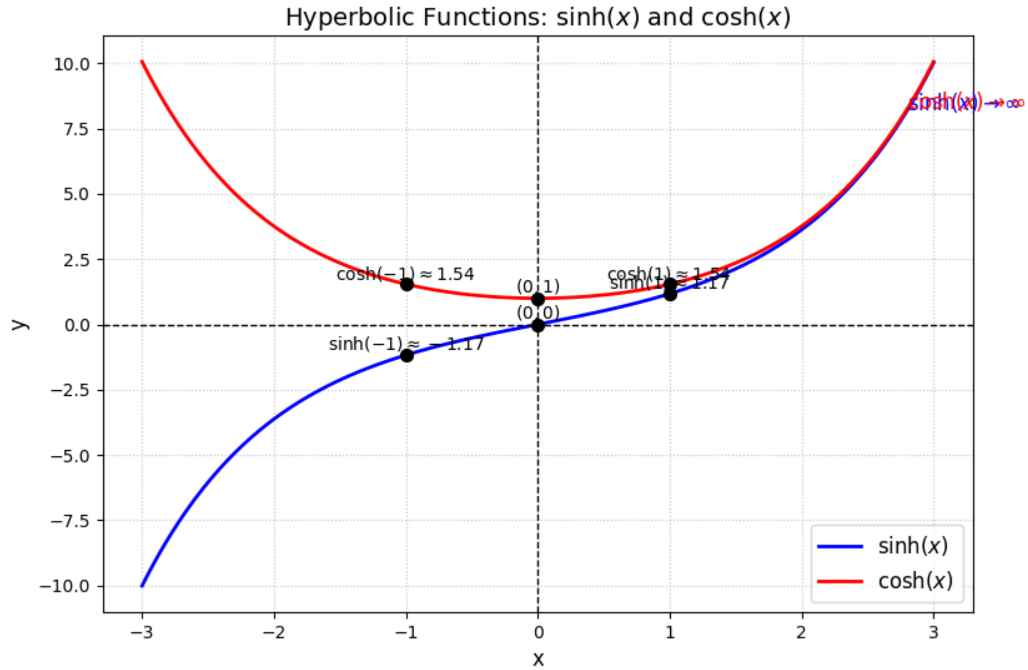
## תוכן העניינים



### שאלה 1: פיתוח $\sinh x$ ו-$\cosh x$ לטור חזקות

פתחו את הפונקציות $f(x) = \sinh x, g(x) = \cosh x$ לטור חזקות סביב הנקודה $x_0 = 0$. הראו שסכום שני סדרי החזקות לעיל מתלכד עם סדר החזקות של $h(x) = e^x$ סביב הנקודה $x_0 = 0$.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$




sinh and cosh

**נגזרות של** $\cosh(x)$

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
\cosh(x) & = & \frac{e^x+e^{-x}}{2} & \cosh(0) & = & 1 \\
\cosh'(x) & = & \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x) & \cosh'(0) & = & 0 \\
\cosh''(x) & = & \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x) & \cosh''(0) & = & 1 \\
\cosh'''(x) & = & \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x) & \cosh'''(0) & = & 0
\end{array}
$$

**פיתוח טור חזקות של** $\cosh(x)$ **סביב** $x_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \cosh(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

$$
\cosh^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & n \text{ is odd,} \\ 1, & n \text{ is even.} \end{cases}
$$

**פיתוח טור חזקות של** $\sinh(x)$ **סביב** $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sinh^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$\sinh^{(n)}(x) = \begin{cases} 1, & n \text{ is odd,} \\ 0, & n \text{ is even.} \end{cases}$$

**חיבור** $\sinh(x)$ **ו-**$\cosh(x)$ **נותן** $e^x$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \cosh(x) + \sinh(x) \end{aligned}$$

**שאלה 2: פיתוח** $\ln x$ **סביב** $x_0 = e$

נגזור את $\ln x$ ונציב בנוסחה:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln x \\ \ln' x &= \frac{1}{x} \\ \ln'' x &= -\frac{1}{x^2} \\ \ln''' x &= \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

הבהרה - נזכיר שהנקודה $x_0$ מסייעת לקבוע את האזור שסביבו מפתחים, היא לא מחליפה את $x$.

נתחיל בהצבה:

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= \frac{\overbrace{\ln(e)}^{1} \cdot \overbrace{(x-e)^0}^{1}}{0! = 1} + \frac{\frac{1}{e}}{1} \cdot (x-e)^1 - \frac{\frac{1}{e^2}}{2} \cdot (x-e)^2 + \frac{\frac{2}{e^3}}{6} \cdot (x-e)^3 + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{e} \cdot (x-e)^1 - \frac{1}{2e^2} \cdot (x-e)^2 + \frac{1}{3e^3} \cdot (x-e)^3 + \cdots \\
&= \boxed{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot e^n} (x-e)^n}
\end{aligned}$$

**שאלה 3: פתחו את** $f(x) = \tan^{-1} x$ **בחזקות של** $x$ **וחשבו את** $\pi$ **בקרוב גרוע**

האמירה "בחזקות של $x$" מרמזת שמדובר בפיתוח לטור טיילור סביב $x_0 = 0$ (פיתוח סביב 0 נקרא גם **טור מקלורן**).

נוסחאות חשובות:

$$\tan^{-1}(0) = 0, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tan^{-1} x, & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= \frac{-2(1+x^2) + 4x^2}{(1+x^2)^3}, & f'''(0) &= -2 \\
f^{(4)}(x) &= \frac{2(1+x^2)(6x^2-1)}{(1+x^2)^4}, & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

ננסה לכתוב את הפונקציה כטור חזקות לפי הנוסחה:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}
\end{aligned}$$

מדובר בניחוש קל אך קשה להוכחה, לפי המתרגל המעולה שלנו. מכל מקום, מצאנו שמתקיים:

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

לחישוב קירוב של $\pi$, נשתמש בעובדה ש-$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

$$\pi \approx 4 \cdot (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}) = 4 \cdot \frac{76}{105} \approx 2.90$$

זהו אכן קירוב גרוע ל-$\pi$ (הערך המדויק הוא כ-3.14159).

### שאלה 4: רישום פולינום בחזקות שונות

נתון: $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

הציגו אותו:

1. בחזקות של $(x-1)$
2. בחזקות של $(x+1)$

**א. בחזקות של** $(x-1)$

נציב $u = x - 1$ ומכאן $x = u + 1$ והפולינום הוא:

$$P_3(x) = 2(u+1)^3 + 3(u+1)^2 + 4(u+1) + 5$$

אנחנו עצלנים אז ננסה דרך אחרת - נפתח את הפולינום כטור חזקות סביב הנקודה $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
P_3 &= 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5, & p_3(1) &= 14 \\
P_3' &= 6x^2 + 6x + 4, & p_3'(1) &= 16 \\
P_3'' &= 12x + 6, & p_3''(1) &= 18 \\
P_3''' &= 12, & p_3'''(1) &= 12
\end{aligned}$$

אז:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= 14 + 16(x-1) + 18/2(x-1)^2 + 12/6(x-1)^3 \\
&= \boxed{2(x-1)^3 + 9(x-1)^2 + 16(x-1) + 14}
\end{aligned}$$

**ב. בחזקות של** $x + 1$

כבר חישבנו את החזקות, הפעם נפתח סביב $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned}
P_3 &= 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5, & p_3(-1) &= 2 \\
P_3' &= 6x^2 + 6x + 4, & p_3'(-1) &= 4 \\
P_3'' &= 12x + 6, & p_3''(-1) &= -6 \\
P_3''' &= 12, & p_3'''(-1) &= 12
\end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= 2 + 4(x+1) + (-6)/2(x+1)^2 + 12/6(x+1)^3 \\
&= \boxed{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 2}
\end{aligned}$$

### שאלה 5: נוסחת הבינום של ניוטון

הבינום של ניוטון מוגדר כך:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m y^{n-m}$$

כאשר $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

להלן הוכחה באינדוקציה ש-Claude הציע. מכיוון שלא התבקשנו בכלל להוכיח ולא למדנו אינדוקציה אני משאיר אותה כאן לשלמות התמונה:

נוכיח באינדוקציה:

עבור $n=0$: $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^0$, הנוסחה מתקיימת.

נניח שהנוסחה נכונה עבור $n=k$:

$$(x+y)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m}$$

ונוכיח עבור $n=k+1$:

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k &= (x+y)\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m} \\ &= x\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m} + y\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m} \\ &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{m+1} y^{k-m} + \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k-m+1}\end{aligned}$$

בסכום הראשון נעשה החלפת משתנים $j=m+1$:

$$= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} x^j y^{k+1-j} + \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^m y^{k+1-m}$$

נפצל את הסכום השני:

$$\begin{aligned}&= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} x^j y^{k+1-j} + \binom{k}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k+1-j} \\ &= \binom{k}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \left( \binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right) x^j y^{k+1-j} + \binom{k}{k} x^{k+1} y^0\end{aligned}$$

נשתמש בזהות $\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j}$:

$$= \binom{k+1}{0} x^0 y^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \binom{k+1}{j} x^j y^{k+1-j} + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} y^0$$

$= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} x^j y^{k+1-j}$

מה שמוכיח את הנוסחה עבור $n = k+1$.

### שאלה 6: קשרים בין פונקציות מרוכבות והיפרבוליות

השורש של $(-1)$ מוגדר על ידי $i$ כך ש-$i^2 = -1$.

מספר מרוכב הוא מספר בצורת $a + bi$ כאשר $a$ ו-$b$ הם מספרים ממשיים:

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

היעזרו בשאלה הראשונה ופיתוחים של $\sin, \cos$ כדי להראות:

1. $\cosh(ix) = \cos x$
2. $\sinh(ix) = i \sin x$
3. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$
4. $e^{i\pi} + 1 = 0$

---

**א. הראו:** $\cosh(ix) = \cos x$

מהפיתוח לטור חזקות של $\cosh$:

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

נציב $x = iy$:

$$\cosh(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} y^{2n}}{(2n)!}$$

מכיוון ש-$i^{2n} = (-1)^n$, נקבל:

$$\cosh(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - ...$$

זהו בדיוק הפיתוח לטור חזקות של $\cos y$. לכן $\cosh(ix) = \cos x$.

---

**ב. הראו:** $\sinh(ix) = i\sin x$

מהפיתוח לטור חזקות של sinh:

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

נציב $x = iy$:

$$\sinh(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\sin y$$

לכן $\sinh(ix) = i\sin x$.

---

הרחבה לגבי המעבר:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

נפשט את הביטוי $(iy)^{2n+1}$:

$$(iy)^{2n+1} = (iy)^{2n} \cdot (iy) = (i)^{2n} \cdot (y)^{2n} \cdot i \cdot y = (i)^{2n} \cdot i \cdot y^{2n+1}$$

כעת, חשוב להבין מהו $(i)^{2n}$. זכור כי:

- $i^2 = -1$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

חזקות של $i$ **חוזרות במחזוריות של 4**:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$
- וכן הלאה...

לכן, $i^{2n}$ תלוי ב-$n$ באופן הבא:

- **אם** $n$ **זוגי** אז יש לנו חזקה של ארבע ולכן $i^{2n} = 1$
- אם $n$ **אי-זוגי** עדיין חזקה של שתיים, ולכן: $i^{2n} = -1$

זוהי נוסחה מדויקת יותר: $i^{2n} = (-1)^n$

לכן:

$$(iy)^{2n+1} = (i)^{2n} \cdot i \cdot y^{2n+1} = (-1)^n \cdot i \cdot y^{2n+1} = i \cdot (-1)^n \cdot y^{2n+1}$$

---

**ג. הראו:** $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$

נשתמש ב-$e^x = \cosh x + \sinh x$.

נציב $x = iy$:

$$e^{iy} = \cosh(iy) + \sinh(iy) = \cos y + i \sin y$$

זוהי נוסחת אויילר המפורסמת. בדומה, $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$.

---

**ד. הראו:** $e^{i\pi} + 1 = 0$

לפי נוסחת אוילר:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

מכאן: $e^{i\pi} + 1 = -1 + 1 = 0$.

### שאלה 7: קירובים באמצעות סדר ראשון בטור טיילור

סדר ראשון בפיתוח לטור חזקות יכול להיראות גם כך:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \cdots$$

1. למה ומדוע?
2. היעזרו בקשר הנ"ל וחשבו בקירוב את $\sqrt[3]{25}$
3. וגם $\ln 1.12$

הערה: סימון ברור יותר יהיה $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \cdots$

---

הצורה המוכרת נראית כך:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + (R)$$

נסמן $x = x_0 + \Delta x$, ונקבל:

$$x = x_0 + \Delta x$$
$$x - x_0 = \Delta x$$

נציב במקום $(x - x_0)$ את $\Delta x$ ואת $x_0 + \Delta x$ במקום $x$:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2 + \cdots$$

נעביר את $f(x_0)$ לצד שמאל:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2+\cdots\blacksquare$$

---

כדי לחשב את $\sqrt[3]{25}$ **נמצא נקודה** $x_0$ **נוחה**, כדי שנוכל לחשב את הנגזרת הראשונה והשנייה שלה בקלות. נבחר $x_0=27=3^3$ ונציב את הנקודה הזו בנוסחה:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}\Delta x^2+\cdots$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}$$

$$x_0=27,\quad \Delta x=-2$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{27}&=(\sqrt[3]{x})'|_{x=27}(-2)+\frac{(\sqrt[3]{x})''}{2}|_{x=27}(-2)^2+\cdots\\ \sqrt[3]{25}-3&=\frac{1}{3}\underbrace{27^{-\frac{2}{3}}}_{=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2}=\frac{1}{9}}(-2)+\underbrace{\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(27^{-\frac{5}{3}}\right)}{2}}_{\text{very small number}\approx 0}+\cdots\\ \sqrt[3]{25}&\approx 3-\frac{2}{27}\approx\boxed{\frac{25}{27}}\quad\blacksquare\end{aligned}$$

---

נפעל באופן דומה כדי לחשב את $\ln(1.12)$: נגדיר $x_0=1$ ומכאן ש-$\Delta x=0.12$:

$$f(x)=\ln x$$

$$x_0=1$$

$$\Delta x=0.12$$

$$\begin{aligned}\ln(1.12)-\underbrace{\ln(1)}_{0}&=\frac{1}{x}|_{x=1}(0.12)-\frac{1}{x^2}|_{x=1}\frac{(0.12)^2}{2}+\cdots\\ \ln(1.12)&\approx 0.12-\frac{0.12^2}{2}\\ &\approx 0.12-0.0144\\ &\approx\boxed{0.11}\blacksquare\end{aligned}$$

---

### שאלה 8: חקירת פונקציות

מצאו את כל נקודות האקסטרמום (מינימום מקומי, מקסימום מקומי, פיתול אופקי, פיתול משופע) של הפונקציות הבאות (אם יש כאלו), והביאו את ערכי הפונקציה בנקודות אלו. אם מדובר בנקודות פיתול, נסו לסווג אותן (ייתכנו שני סוגי פיתול אופקי וארבעה סוגי פיתול משופע) חשבו גם את $\lim_{x\to -1^+} g(x)$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

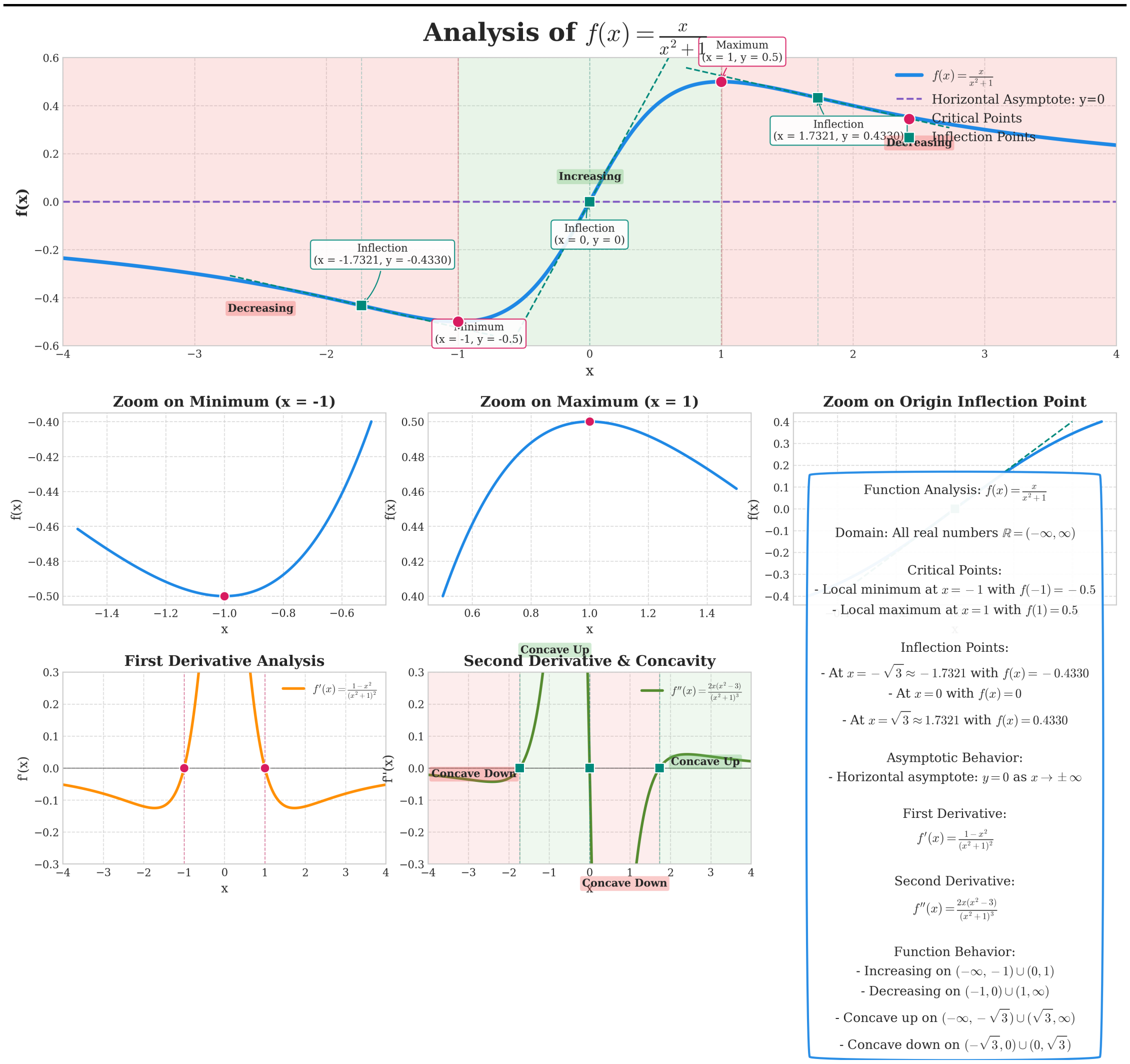
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} \\ &= \boxed{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1 \end{aligned}$$

כלומר שמצאנו שתי נקודות חשודות: $x = 1, x = -1$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)(1-x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2x(1+x^2)(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{-2x(1+x^2)(3-x^2)}{(1+x^2)^4} \\ f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

כלומר, הנגזרת השנייה מתאפסת בנקודות $x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$.

| $x$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-0+$ | $+$ | $+0-$ | $-$ | $-0+$ |
| סיווג | פיתול משופע | **נקודת מינימום** | פיתול משופע | **נקודת מקסימום** | פיתול משופע |




$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$$

המתרגל לא התעכב על השאלה הזאת, להבנתי לאור הקושי הרב שלה.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \sin(x) - x\cos(x) + \sin(x) \\ &= x(2 - \cos(x)) \end{aligned}$$

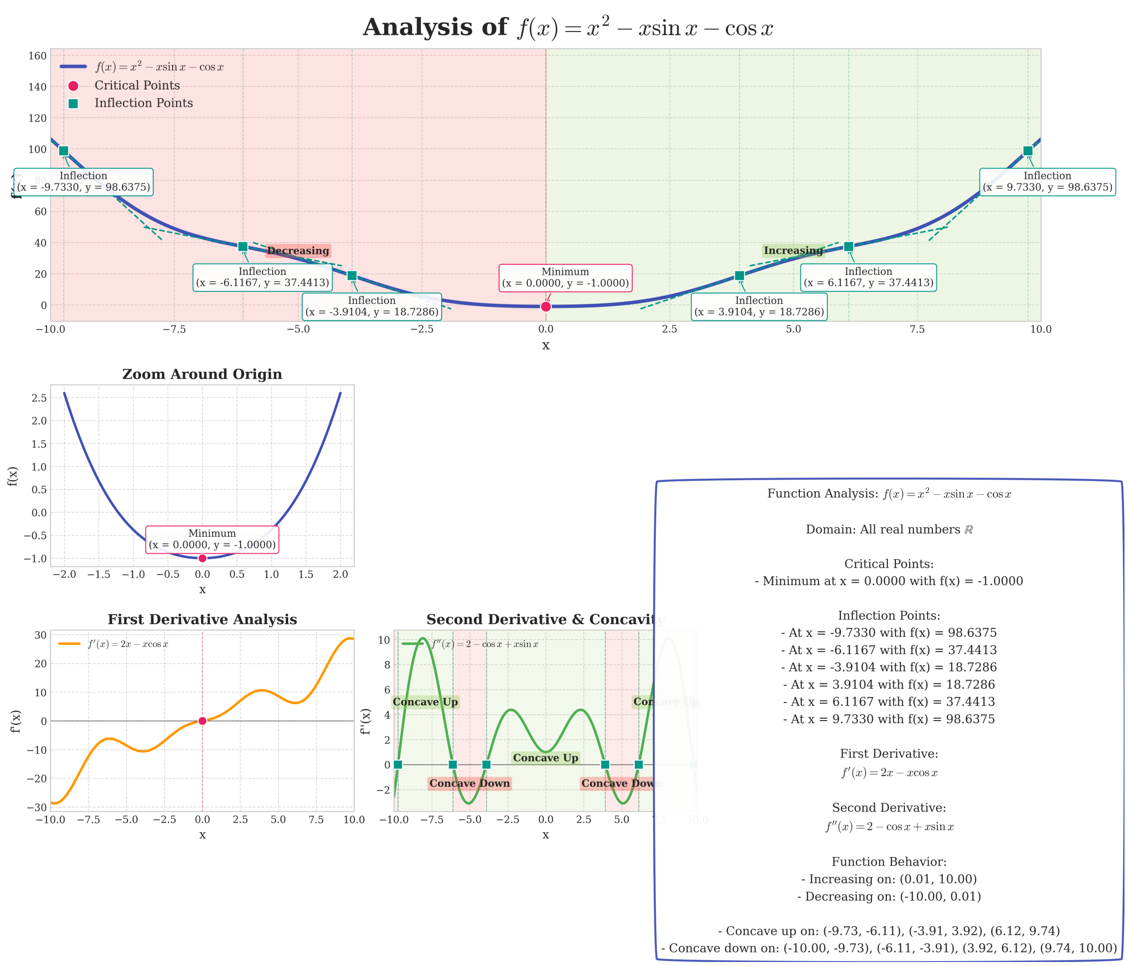
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0\,,\ f'(0^-) < 0\,,\ f'(0^+) > 0}$$

$$f''(x) = 2 - \cos(x) + x\sin(x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\cos(x) - 2}{\sin(x)}$$

הפעם יותר נוח לנו להסתכל על הגרפים, ואפשר להסיק שנקודת $x = 0$ היא נקודת מינימום (שהרי כבר מצאנו מסימני נגזרת ראשונה שזוהי נקודת מינימום).

ניתן להבחין שהפונקציה של הנגזרת השנייה היא: $2-\cos(x)+x\sin(x)$. קשה מאוד לקבוע מתי היא מתאפסת, ולכן ניעזר בגרף.




$$f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$$

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

נגזור בעזרת הכלל לנגזרת של מנה:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\cdot x-\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2} \\ &= 0 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftrightarrow x=e \end{aligned}$$

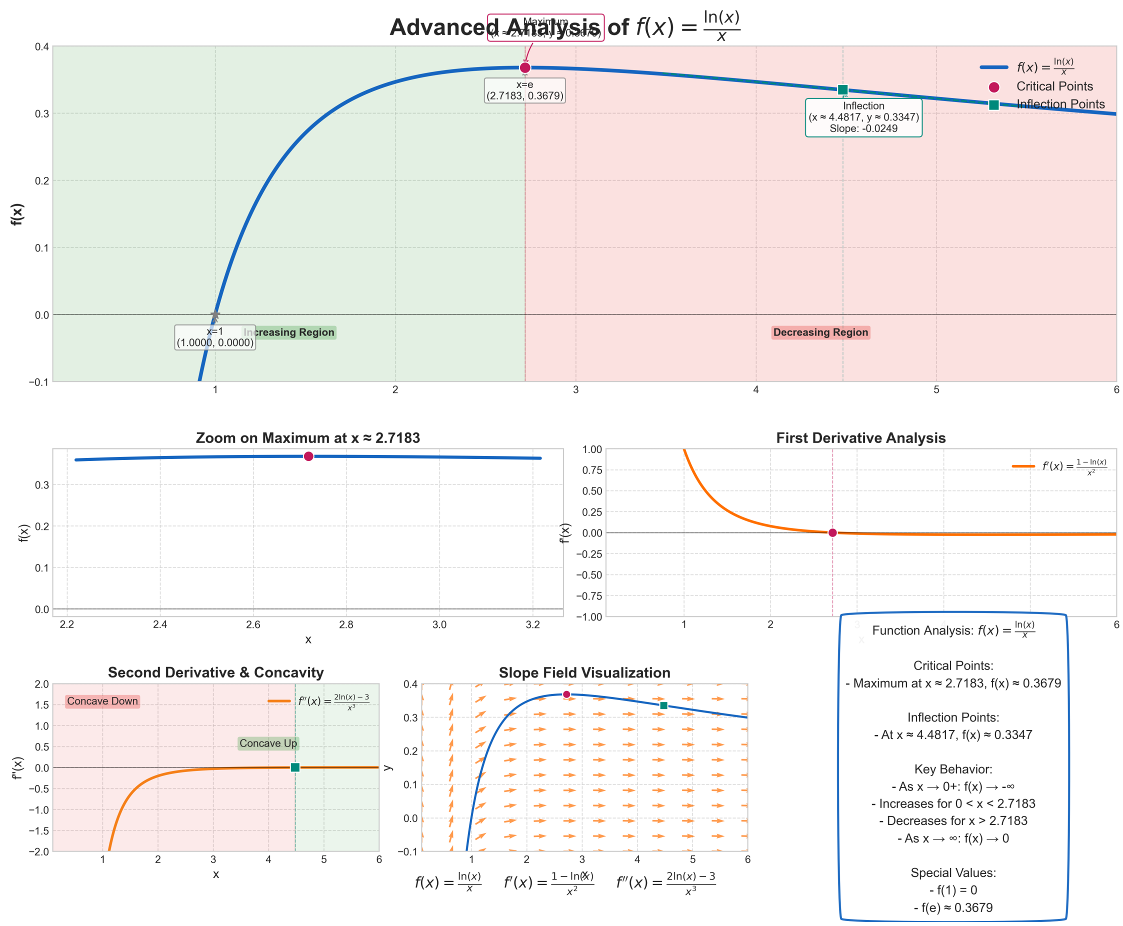
מצאנו נקודה חשודה ב-$x=e$.

נשתמש בנגזרת של מנה פעם נוספת:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-x^2(-1)x^{-2} - (1-\ln(x))2x}{x^4} \\
&= \frac{-(3+\ln(x))}{x^3} \\
&= 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^3}
\end{aligned}
$$

הנגזרת השנייה מתאפסת ב-$x = \frac{1}{e^3}$.

| $x$ | $1/e^3$ | $e$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ |
| $f''(x)$ | $0$ | $-$ |
| סיווג | נקודת פיתול | **נקודת מקסימום** |




$f(x) = \frac{\ln x}{x}$

$g(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$

נפשט את הביטוי:

$$f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 3x^{-1} - x^{-3}$$

נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$f'(x) = -3x^{-2} + 3x^{-4} = \boxed{\frac{3(1-x^2)}{x^4}}$$

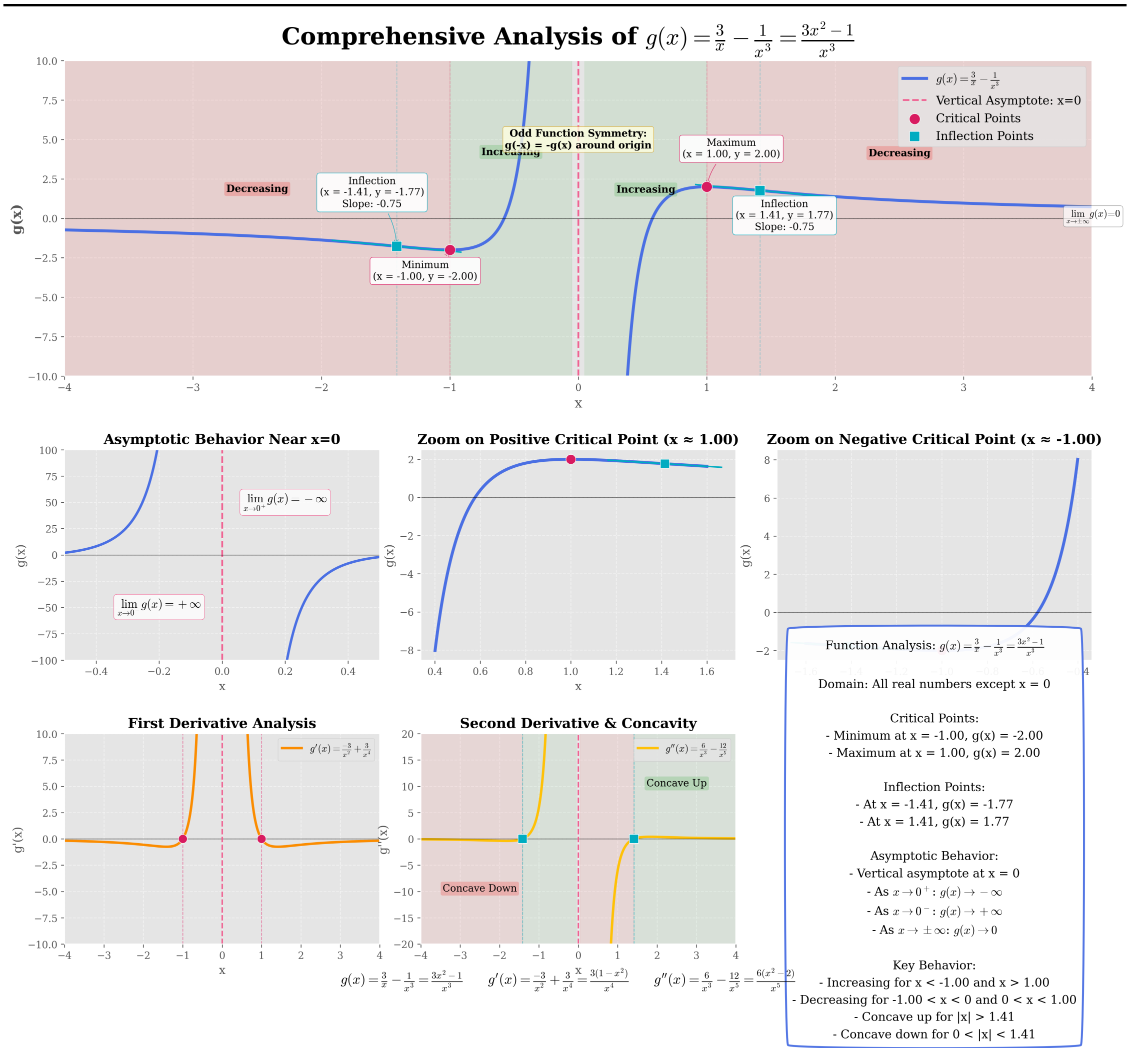
הנגזרת הראשונה מתאפסת בנקודות $x = \pm 1$.

נחשב את הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = 6x^{-3} - 12x^{-5} = \boxed{6x^{-5}(x^2-2)}$$

הנגזרת השנייה מתאפסת בנקודות $x = \pm\sqrt{2}$.

| $x$ | $-\sqrt{2}$ | $-1$ | $1$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $0$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-0+$ | $+$ | $-$ | $-0+$ |
| סיווג | פיתול משופעת | **נקודת מינימום** | **נקודת מקסימום** | פיתול משופעת |




$$g(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$$

$g(x) = 10\log(x+1)^{\log(x+1)^{(x+1)}}$ **בקטע** $-1 < x \le 1$

רמז: פשטו קודם לכן את הביטוי באגף ימין.

$$\begin{aligned} g(x) &= 10\log(x+1)^{\log(x+1)^{(x+1)}} \\ &= 10\log(x+1)^{(x+1)} \cdot \ln(x+1) \end{aligned}$$

חזקה הוצאת

$$= 10(x+1)\log^2(x+1)$$

נחשב את הנגזרת הראשונה:

$$g'(x) = 10\log^2(x+1) + 10(x+1)\cdot 2\log(x+1)\frac{1}{x+1}$$
$$= 10\log(x+1)(\log(x+1)+2)$$
$$= 0 \Leftrightarrow \log(x+1) = 0 \text{ או } \log(x+1) = -2$$

נמצא נקודות חשודות:

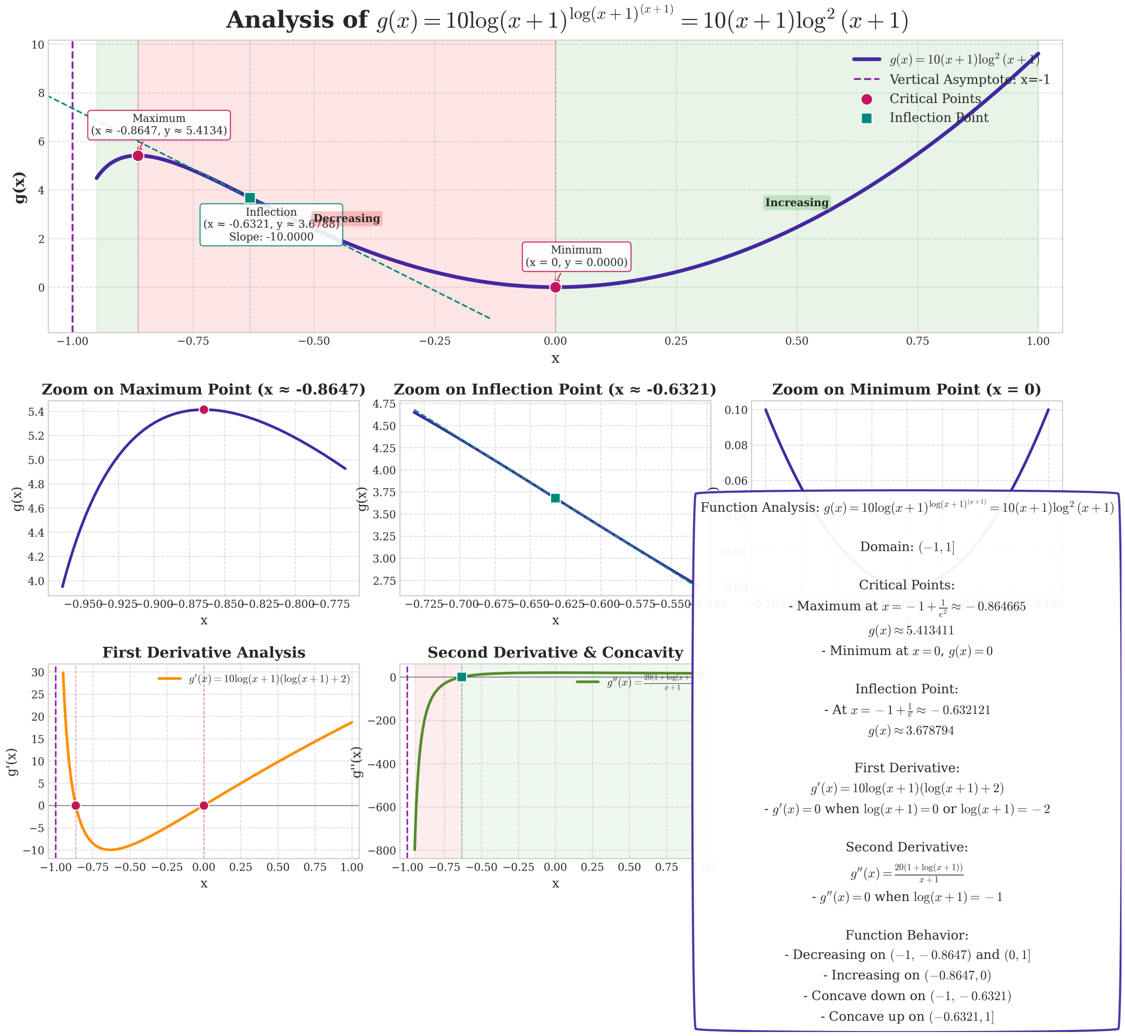
$$\Rightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$$
$$\Rightarrow x+1 = e^{-2} \Leftrightarrow \boxed{x = -1 + \frac{1}{e^2}}$$

מצאנו שהנגזרת הראשונה מתאפסת בנקודות $x=0, x=-1+\frac{1}{e^2}$.

$$g''(x) = \frac{20}{x+1} + \frac{20}{x+1}$$
$$= \frac{20}{x+1}(1+\log(x+1))$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x+1) = -1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \boxed{x = -1+\frac{1}{e}}$$

| $x$ | $-1+\frac{1}{e^2}$ | $-1+\frac{1}{e}$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $g''(x)$ | $-$ | $-0+$ | $+$ |
| סיווג | **נקודת מקסימום** | נקודת פיתול | **נקודת מינימום** |




$$g(x) = 10\log(x+1)^{\log(x+1)^{(x+1)}}$$