טורי חזקות, טור טיילור ומקלורן

23:16:48 2025-01-16

תוכן העניינים

פיתוח הפונקציה לתור חזקות

לפונקציות ש"מתנהגות יפה" (בנפנופי ידיים), מתקיים:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

פיתוח לתור חזקות סביב הנקודה $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ...$$

כאשר $x = x_0$ קל לראות שכל החזקות מתאפסות והביטוי שמתקבל הוא למעשה:

$$f(x_0) = a_0$$

כאשר אני גוזר את f לפי x, החזקה יורדת, וכל האיברים נופלים למעט המקדם השני:

$$f'(x_0) = a_1$$

באופן דומה, אם נגזור את הפונקציה פעמיים, נקבל:

$$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$$

נמשיך אם הנגזרת השלישית ונקבל:

$$\begin{aligned} f'''(x_0) &= 2 \cdot 3a_3 + \dots + m(m-1)(m-2)a_m(x-x_0)^{m-3} + \dots \\ &= 2 \cdot 3a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(x_0) \end{aligned}$$

באופן כללי, אם נחזור על התהליך m פעמים:

$$\boxed{a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}}$$

מסקנות

- רק אם הפונקציה נגזרת אינסוף פעמים בנקודה x_0 נוכל לחזור על התהליך
- אם היא אכן מקיימת את התנאי הקודת, הפיתוח שלה מקיים:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

- כאשר $x_0 = 0$, נקבל:

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

דוגמאות לפונקיות ש"מתנהגות יפה" כוללות, בין היתר:

- הפולינומים
- המערכיות
- הטריגונומטריות

דוגמאות

$f(x) = e^x$

עבור פונקציית האקספוננט $f(x) = e^x$, מתקיים לכל נגזרת $f^{(n)}(x) = e^x$, ולכן: $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1, \ldots$ לכן, נקבל:

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

אז בנקודה $x_0 = 0$ נקבל:

$$e^0 = 1 + 0 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \ldots$$

$f(x) = \sin x$

הנגזרות של פונקציית הסינוס הן:

$$\begin{array}{rcl|rcl} f(x) & = & \sin(x) & f(0) & = & 0 \\ f'(x) & = & \cos(x) & f'(0) & = & 1 \\ f''(x) & = & -\sin(x) & f''(0) & = & 0 \\ f'''(x) & = & -\cos(x), \ldots & f'''(0) & = & -1 \end{array}$$

ומכאן התהליך חוזר על עצמו:

$$f''''(x) = sin(x) \quad f''''(0) = 0$$

מכאן שנוכל לפתח את פונקציית הסינוס

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}}$$

אם נפתח סביב 0 $x_0 = 0$, נקבל:

$$f(x) = f(0) + \underbrace{f'(0)(x-0)}_{1 \cdot x} + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \underbrace{\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3}_{-\frac{1}{3!}x^3} + \ldots$$

המספרים לאחר הגורמים הראשונים מאוד קטנים. מכאן נוכל להסיק שעבור $x \to 0$, מתקיים $\sin x \approx x$.

זה גם לא מפתיע לאור הגבול $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$f(x) = \cos x$

הנגזרות של פונקציית הקוסינוס הן:

$$\begin{array}{rcl|rcl} f(x) & = & \cos(x) & f(0) & = & 1 \\ f'(x) & = & -\sin(x) & f'(0) & = & 0 \\ f''(x) & = & -\cos(x) & f''(0) & = & -1 \\ f'''(x) & = & \sin(x), ... & f'''(0) & = & 0 \end{array}$$

ומכאן התהליך חוזר על עצמו:

$$f''''(x) = \cos(x) \quad f''''(0) = 1$$

אז אם $f(x) = f(x) + f'(0)x + f'(0)x^2 + ...$, נקבל:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}$$

הערות לגבי זוגיות

אנחנו יודעים שפונקציית הקוסינוס **זוגית**, כלומר $\cos(-x) = \cos(x)$, אפשר לראות שגם בפיתוח לטור החזקות **קיבלנו רק חזקות זוגיות**.

באופן דומה, פונקציית הסינוס היא **אי-זוגית**, כלומר $\sin(-x) = -\sin(x)$, ואכן בפיתוח שלה נותרות רק **חזקות אי-זוגיות**.

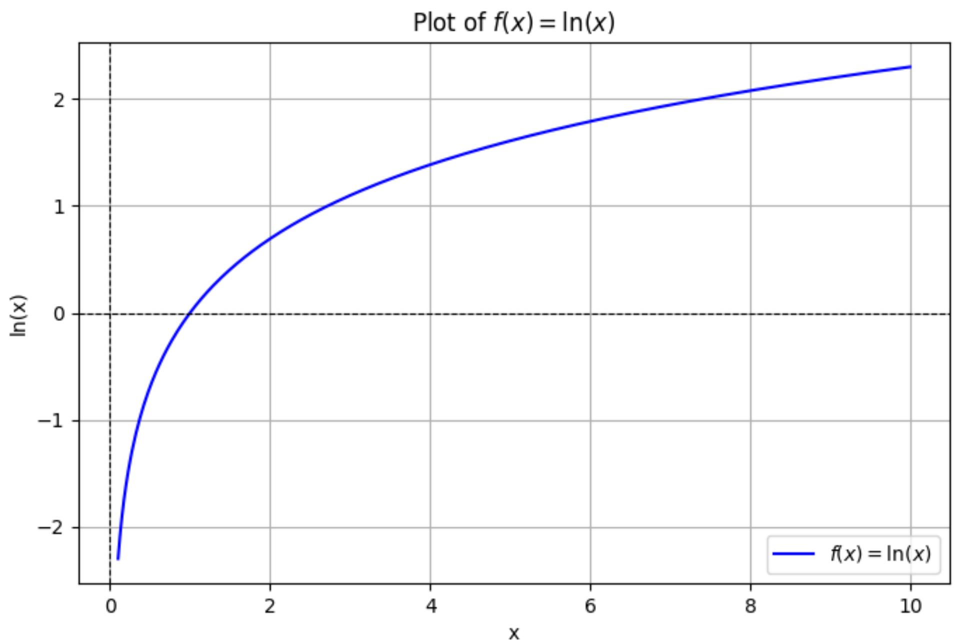
אם נסתכל בפונקציית ההיפרבוליות

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

נוכל לראות שהחיבור שלהן נותן את הפונקציה האקספוננציאלית e^x בפיתוח לטור חזקות.

פיתוח סביב $x_0 = 1$ של הפונקציה הלוגריתמית $f(x) = \ln(x)$



$f(x) = \ln(x)$

אנחנו יודעים שפונקציית הלוגירתם ln **אינה מוגדרת בנקודה 0**, וכך גם נגזרותיה. אבל היא **כן** נוחה לפיתוח סביב $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(x) & f(1) &= \ln(1) = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(1) &= 1 \\
f''(x) &= (-1)x^{-2} & f''(1) &= -1 \\
f'''(x) &= (-1)(-2)x^{-3} & f'''(1) &= +2! \\
f''''(x) &= (-1)(-2)(-3)x^{-4} & f''''(1) &= -3!
\end{aligned}$$

באופן כללי, האיברי ה-m מתקבל על ידי:

$$\boxed{f^{(m)}(1) = (-1)^{m-1}(m-1)!}$$

מכאן:

$$\underbrace{\ln(x)}_{f(x)} = \ln(1) + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

אם נבחר $x_0 = 2$

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

אם נגדיר $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$

$$\ln(y+1) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ...$$

מההצבה האחרונה אפשר למשל ללמוד שכאשר $y \to 0$, מתקיים $\ln(1+y) \approx y$.

פיתוח פולינומים לטור חזקות

נשים לב שכל פולינום הוא הפיתוח שלו עצמו לטור חזקות. נסתכל לדוגמה בפולינום הבא:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6$$

הנגזרות שלו הן:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6 \\ f'(x) &= 6x^2 - 6x + 5 \\ f''(x) &= 12x - 6 \\ f'''(x) &= 12 \end{aligned}$$

נניח שאנחנו רוצים לרשום אותו כביטוי בחזקות של $(x-1)$, כלומר:

$$f(x) = a(x-1)^b + c(x-1)^d + ...$$

אז במקום לפתח לטור חזקות סביב $x_0 = 0$, נפתח סביב $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1)^3 - 3(1)^2 + 5(1) + 6 \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 6(1)^2 - 6(1) + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1) &= 12(1) - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$f'''(1) = 12$$

כעת ניתן לרשום את הפולינום בצורת טור טיילור סביב $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\ &= \boxed{10 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + 2(x-1)^3} \end{aligned}$$

מתי הטור מתכנס אל הפונקציה?

מתי מתקיים:

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

מדלגים על הקריטריונים להתכנסות. כן נביא קריטריון אחד: **רדיוס ההתכנסות של הטור**.

כאשר $f(x) = e^x$ או $f(x) = \sin x$ או $f(x) = \cos x$ או כל הפולינומים, רדיוס ההתכנסות שלנו הוא ∞. באופן כללי, רדיוס ההתכנסות בנקודה $x = x_0$ מתקבל על ידי:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

או בניסוח אחר (כמו שנלמד בכתה):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

רדיוס ההתכנות של $\ln(x)$

האיבר ה-n של פונקציית הלוגריתמית הוא:

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\overset{=1}{1^{n-1}}}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot\left(\ln\left(\frac{1}{n}\right)\to\ln 1 - \ln n\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-\ln(n)}{n}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(n)}{n}} \\
&= e^0 = \boxed{1}
\end{aligned}$$

בדרך אחרת:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

לסיכום, רדיוס ההתכנסות של פונקציית הלוגריתמית הוא **1**.

המשמעות של התוצאה הזאת, היא שנוכל לפתח את פונקציית הלוגריתם בנקודות מהסביבה $(0,2) = (x_0 - 1, x_0 + 1)$. מעבר לכך הטור כבר לא יתכנס.

טור טיילור

טור טיילור הוא טור חזקות המשויך לפונקציה חלקה ולנקודה כלשהי x_0 פנימית לתחום הגדרתה, שמקדמיו מחושבים על ידי ערכי הנגזרות של הפונקציה ב"נקודת הפיתוח" x_0 של הטור. לעיתים טור טיילור של הפונקציה מתכנס אליה בסביבה כלשהי של נקודת הפיתוח, ובמקרה זה הסכומים החלקיים של הטור, כלומר פולינומים, מקרבים את הפונקציה בסביבה זו. זוהי למעשה הכללה של הקירוב הליניארי (קירוב מסדר ראשון)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

שמתקבל על ידי משפט הערך הממוצע של לגראנז'. (ויקיפדיה).

תהי f פונקציה גזירה אינסוף פעמים ב-x_0, אז:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

כלומר

$$\begin{aligned} f(x)_{n\to\infty} &= lim \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... \end{aligned}$$

טור טיילור - חזרה

נתבונן בביטוי הבא:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0, \xi)$$

איבר השארית

הביטוי $R_n(x, x_0, \xi)$ נקרא איבר השארית והוא מסמן את ההפרש בין הפולינום הטיילורי לפונקציה המקורית:

$$R_n(x, x_0, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad x < \xi < x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x, x_0, \xi)}{(x - x_0)^n} = 0$$

טור מקלורן

כאשר $x_0 = 0$ נקבל טור מקלורן:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x, 0, \xi)$$

תרגול

כל התרגילים בשיעורי הבית ובתרגול זמינים בעמוד טורי חזקות - תרגילים ופתרונות (M8).

החלק הבא של הקורס עסק בנושא נקודות פיתול.