משפטי ערך הביניים - תרגילים ופתרונות

M7 - משפטי ערך הביניים וכלל לופיטל

דור פסקל

2025-02-28 18:05:27

תוכן העניינים

שאלה 1 - שימושים במשפטי ערך הביניים

א. הוכחת המקרה הכללי

לכל $a > b$. יש להוכיח:

$$\frac{b-a}{1+b^2} \ < \ \arctan(b)-\arctan(a) \ < \ \frac{b-a}{1+a^2}$$

מבנה המשוואה במשפט לגרנג' הוא:

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

נחלק את אי השוויון ב $b-a$ (מספר חיובי) ונקבל:

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{\tan^{-1}b-\tan^{-1}a}{b-a}<\frac{1}{1+a^2}$$

נבחר $f(x)=\tan^{-1}(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב-(a,b), ולכן קיים $\xi\in(a,b)$ כך ש-

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{1+\xi^2}=\frac{\tan^{-1}b-\tan^{-1}a}{b-a}$$

נשים לב שלכל $x\in(a,b)$ מתקיים:

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+a^2}$$

ובפרט עבור $x=\xi$:

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{1}{\underbrace{1+\xi^2}_{f'(\xi)}}<\frac{1}{1+a^2}$$

לכן:

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{1+a^2} \quad \Big/ \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2}<\underbrace{\tan^{-1}b}_{f(b)}-\underbrace{\tan^{-1}a}_{f(a)}<\frac{b-a}{1+a^2}$$

ב. מקרה פרטי

ב. ובפרט:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25}<\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$$

נשים לב ש-$\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ ונחסר אותו מכל האגפים:

$$\frac{3}{25} < \tan^{-1}\left(\underbrace{\frac{4}{3}}_{b}\right) - \tan^{-1}(\underbrace{1}_{a}) < \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

פתרון: נציב $a = 1$, $b = \frac{4}{3}$ בתוצאה הקודמת ונקבל:

$$\underbrace{\frac{3}{25}}_{\frac{\frac{4}{3}-1}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{25}{9}}} < \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) - \tan^{-1}(1) < \frac{1}{6}$$

הוכחנו שהביטוי בצד שמאל מתקיים וזה קרה אמ"מ הביטוי המבוקש מתקיים. מש"ל.

ג. אי־שוויון ללוגריתם

אם $0 < a < b$, יש להוכיח:

$$1 - \frac{a}{b} \ < \ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \ < \ \frac{b}{a} - 1.$$

נשים לב כי $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a)$. ממשפט ערך הביניים קיים $\xi \in (a, b)$ כך ש-$\frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} = \frac{1}{\xi}$. נכפיל את שני הצדדים ב-$b - a$ ונקבל:

$$\ln(b) - \ln(a) = \frac{b-a}{\xi} \Rightarrow \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b-a}{\xi}$$

נשים לב שלכל $x \in (a, b)$ מתקיים:

$$\frac{b-a}{b} < \frac{b-a}{x} < \frac{b-a}{a}$$

או בכתיבה אחרת:

$$1 - \frac{a}{b} < \frac{b-a}{x} < \frac{b}{a} - 1$$

בפרט,

$$1 - \frac{a}{b} < \frac{b-a}{\xi} < \frac{b}{a} - 1$$

נציב $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b-a}{\xi}$ ונקבל את התוצאה הרצויה:

$$1-\frac{a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b}{a}-1$$

ד. מקרה פרטי של אי־שוויון ללוגריתם

$$\frac{1}{6} \;<\; \ln(1.2) \;<\; \frac{1}{5}.$$

ניתן לקבל ע״י הצבה: נבחר $a=5$, $b=6$ ונקבל:

$$1-\frac{5}{6}<\ln\left(\frac{6}{5}\right)<\frac{6}{5}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{6}<\ln(1.2)<\frac{1}{5}$$

כפי שרצינו להוכיח.

ה. קיום ξ עבור תכונת סינוס וקוטנגנס

יש להראות שקיים $a<\xi<b$ כך ש:

$$\frac{\sin(b)-\sin(a)}{\cos(a)-\cos(b)} \;=\; \cot(\xi).$$

ניעזר **במשפט קושי**:

אם $f(x)$ ו$g(x)$ פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$, גזירות בפתחו (a,b), ו$g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$, אז קיים $\xi\in(a,b)$ כך ש:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

נציב $f(x)=\sin(x)$ ו-$g(x)=-\cos(x)$ כי הסימן במכנה הפוך. נקבל:

$$\frac{\sin(b)-\sin(a)}{\cos(a)-\cos(b)}=\frac{\sin'(\xi)}{-\cos'(\xi)}=\cot(\xi)$$

---

2. חישוב גבולות באמצעות כלל לופיטל (L'Hôpital)

א. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan(2x))}{\ln(\tan(3x))} \;=\; 1$

נשים לב שמדובר בגבול מהצורה $\frac{-\infty}{-\infty}$. נשתמש בכלל לופיטל:

$$\begin{aligned}\frac{(\ln(\tan(2x)))'}{(\ln(\tan(3x)))'} &= \frac{\frac{1}{\tan(2x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}{\frac{1}{\tan(3x)}\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}\\ &= \frac{\frac{1}{\sin 2x\cdot\cos 2x}\cdot 2}{\frac{1}{\sin 3x\cos 3x}\cdot 3}\end{aligned}$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית:

$$\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{\sin 2x\cdot\cos 2x}\cdot 2}{\frac{1}{\sin 3x\cos 3x}\cdot 3} &= \frac{\frac{1}{1/2\sin 4x}\cdot 2}{\frac{1}{1/2\sin 6x}\cdot 3}\\ &= \frac{\sin 6x\cdot 2}{\sin 4x\cdot 3}\\ &= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 6x}{\sin 4x}\end{aligned}$$

קיבלנו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, נשתמש בכלל לופיטל פעם נוספת:

$$\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{6\cos 6x}{4\cos 4x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{4} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} = \boxed{1}$$

מצאנו שהגבול שווה 1.

הערה: חשוב להיזהר לא לפספס את הקבועים כשמוציאים אותם במעברים. כמעט פספסתי את $\frac{2}{3}$ שהיה ניתן להוציא מוקדם יותר. המקדמים האלה לא נעלמים בגזירה, אפשר גם להשאיר אותם אבל חשוב לשים לב:

$$(2\sin(6x))' = 2(6\cos(6x)) = 12\cos(6x)$$

$$(3\sin(4x))' = 3(4\cos(4x)) = 12\cos(4x)$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(x^3e^{-2x}\right) = 0$

מדובר בגבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}$. נשתמש בכלל לופיטל:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x^3e^{-2x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{4e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6}{4e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{6}{4e^{2x}} = 0\end{aligned}$$

עקרונית היה אפשר גם להגיע לתוצאה הזאת מכך שאקפוננט חזק יותר מכל פולינום מבחינת סדר גודל.

ג. $\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x}$

פתרון:

נניח שהגבול קיים, סופי וחיובי ונסמן אותו ב-L. נקבל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{3x}-5x)}{1/x} = L$$

נוציא ln לשני האגפים ונקבל:

$$= \lim_{x\to\infty}\ln(e^{3x}-5x)^{1/x} = \ln(L)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\ln(e^{3x}-5x) \overset{\text{L'Hôpital for } \frac{\infty}{\infty}}{\widehat{=}} \frac{\ln(e^3x-5x)'}{x'} = \frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}$$

נשתמש בכלל לופיטל פעם נוספת:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{27\cancel{e^{3x}}}{9\cancel{e^{3x}}} = \frac{9}{3} = 3$$

סך הכל קיבלנו ש:

$$\ln L = 3 \Rightarrow L = e^3$$

כלומר, הגבול הוא $L = e^3$.

ד. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

נעשה מכנה משותף:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\right)$$

נשתמש בכלל לופיטל עבור $\frac{0}{0}$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x}$$

נשתמש בלופיטל פעם נוספת:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{2-2\cos^2 x+2\sin^2 x}^{4\sin^2 x}}{2\sin^2 x+4x\sin x\cos x+4x\sin x\cos x-2x^2\sin^2 x+2x^2\cos^2 x}$$

פעם נוספת:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\sin x\cos x}{4\sin x\cos x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}$$

פעם נוספת:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x}{12\cos 2x+12\cos 2x-\cancel{24x\sin 2x}-\cancel{8x\sin 2x}+\cancel{8x^2\cos 2x}}$$

ולכן:

$$=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

סך הכל קיבלנו ש:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}$$

ה. $\lim_{x\to 0^+}\ x^3\ln(x)\ =\ 0$

נכתוב את הביטוי באופן שיאפשר לנו להשתמש בכלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\ x^3\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\ \frac{\ln(x)}{x^{-3}}$$

נשתמש בכלל לופיטל עבור $\frac{-\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{3x^3} = 0$$

ו. $\lim_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

יש לנו גבול מהצורה $\frac{0}{0}$, נשתמש בכלל לופיטל, נגזור את המונה והמכנה:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^x\ln 3 - 2^x \ln 2}{1} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

ז. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

נניח שקיים L חיובי כך ש-

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = L$$

נוציא ln לשני האגפים ונקבל:

$$\ln(L) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x^{\sin x}) = \lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$$

נשתמש בכלל לופיטל - הגבול מהצורה $\frac{\infty}{\infty}-$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{\cos x} = 1\cdot 0 = 0$$

ולכן:

$$\ln(L) = 0 \Rightarrow L = 1$$

ח. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$

הסבר (באמצעות לוג):

נגדיר

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

ניקח לוגריתם:

$$\ln(L) \;=\; \lim_{x\to 0}\, \frac{1}{x^2}\, \ln\!\Big(\tfrac{\sin x}{x}\Big).$$

כעת, ידוע כי $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \ldots$, ולכן

$$\frac{\sin x}{x} \;\approx\; 1 - \frac{x^2}{6}.$$

מכאן

$$\ln\!\Big(\tfrac{\sin x}{x}\Big) \;\approx\; \ln\!\Big(1 - \tfrac{x^2}{6}\Big) \;\approx\; -\frac{x^2}{6} \quad (\text{קטן } x \text{ עבור}).$$

נחלק ב-x^2 ונקבל

$$\frac{1}{x^2}\, \ln\!\Big(\tfrac{\sin x}{x}\Big) \;\approx\; \frac{1}{x^2}\,\big(-\tfrac{x^2}{6}\big) \;=\; -\tfrac{1}{6}.$$

מכאן $\ln(L) = -\frac{1}{6}$ ולכן $L = e^{-1/6}$.

---

3. הוכחת נוסחאות לנגזרת של עקום פרמטרי

נניח שהפונקציות $x = g(t)$, $y = f(t)$ גזירות פעמיים, וכן $g'(t) \neq 0$.

קבלו בעצמכם את הנוסחאות הבאות:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g'(t)f''(t) - f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$

הערה - מדובר בנגזרת של עקום פרמטרים, Parametric derivative.

נתחיל מהנוסחה הראשונה:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,\overbrace{f(t)}^{y}}{dx} = \frac{df(\quad \overbrace{g^{-1}(x)}^{x=g(t)\Rightarrow t=g^{-1}(x)} \quad)}{dx}$$

תזכורת - הנגזרת של פונקציה מורכבת בסגנון לייבניץ היא:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

כלומר, מדובר בסימון לנגזרת לפי x - לא בחלוקה!

נשתמש בכלל השרשרת, שכן $\frac{df(h(x))}{dx} = f'(h(x)) \cdot h'(x)$:

$$\frac{df(g^{-1}(x))}{dx} = \underbrace{f'(g^{-1}(x))}_{f'(t)} \cdot \underbrace{(g^{-1}(x))'}_{\frac{1}{g'(t)}} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \blacksquare$$

הסבר - $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$

השוויון $(g^{-1}(x))' = \frac{1}{g'(t)}$ נובע מהנגזרת של הפונקציה ההופכית, תחת ההנחה שהפונקציה רציפה ונגזרתה שונה מאפס.

$$(f^{-1}\underbrace{(f(x_0))}_{g(t)=x})' = \frac{1}{f'(\underbrace{x_0}_{t})}$$

אפשר להסביר את השוויון באופן הבא: נניח כי $f(x_0) = y_0$. השוויון הימני נובע מהגדרת הפונקציה ההופכית, לאחר מכן נבצע נגזרת על שני הצדדים לפי y_0 ונקבל:

$$f(f^{-1}(y_0)) = y_0 \Rightarrow \underbrace{(f(f^{-1}(y_0)))'}_{f'(f^{-1}(y_0))\cdot(f^{-1}(y_0))'} = \underbrace{y_0'}_{=1}$$

הפתיח של נגזרת הפונקציה המורכבת התקבל מהכלל לפונקציה מורכבת, כאמור לעיל. נחלק ב $f'(f^{-1}(y_0))$ ונקבל את השוויון הנ"ל:

$$f'(f^{-1}(y_0)) \cdot (f^{-1}(y_0))' = 1 \Rightarrow (f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g'(t)f''(t) - f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}$

נרשום את הביטוי בצורה נוחה יותר:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

לפי סעיף א':

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{dx}$$

נסמן $h(t) = \frac{f'(t)}{g'(t)}$ ונקבל:

$$\frac{d\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)}{dx}=\frac{d(\overbrace{h(t)}^{y_0})}{dx}$$

נעזר שוב בסעיף הקודם ונקבל:

$$\frac{d(h(t))}{dx}=\frac{h'(t)}{g'(t)}=\frac{\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)'}{g'(t)}$$

נפתח לפי הנוסחה לנגזרת של מנה: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$\frac{\left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)'}{g'(t)}=\frac{\frac{f''(t)g'(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^2}}{g'(t)}=\frac{f''(t)g'(t)-f'(t)g''(t)}{[g'(t)]^3}\blacksquare$$

הרחבה: $\left(\tanh^{-1}x\right)'=\frac{1}{1-x^2}$

$$y=f(x)=\tanh^{-1}x\quad\Longrightarrow\quad x=\tanh y$$

נגזור את שני הצדדים לפי x:

$$\frac{dx}{dx}=\frac{d}{dx}(\tanh(y(x)))\quad\Longrightarrow\quad 1=\frac{1}{\cosh^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

כאן $y(x)=\tanh^{-1}(x)$, לכן:

$$1=\frac{1}{\cosh^2 y}\left(\tanh^{-1}x\right)'\quad\Longrightarrow\quad\left(\tanh^{-1}x\right)'=\frac{1}{\frac{1}{\cosh^2 y}}=\cosh^2(y).$$

מכיוון ש-$x=\tanh(y)$, יש לנו:

$$\cosh^2(y)=\frac{1}{1-\tanh^2(y)}=\frac{1}{1-x^2}.$$

לכן, הצורה הפופולרית של הנגזרת היא:

$$\boxed{\left(\tanh^{-1}x\right)'=\frac{1}{1-x^2}.}$$

ננסה לגזור גם לפי הביטוי הישיר של $\tanh^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$:

$$\tanh^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

נגזור לפי x:

$$\frac{d}{dx}\Big(\tanh^{-1}(x)\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\tfrac{1}{2}\ln(\tfrac{1+x}{1-x})\Big).$$

נוציא החוצה את $\frac{1}{2}$:

$$= \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\Big(\ln(\tfrac{1+x}{1-x})\Big).$$

כעת, עלינו לגזור את הלוגריתם:

$$\frac{d}{dx}\Big(\ln(\tfrac{1+x}{1-x})\Big) = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{d}{dx}\Big(\tfrac{1+x}{1-x}\Big).$$

נגזור את הביטוי $\frac{1+x}{1-x}$ באמצעות כלל המנה:

$$\frac{d}{dx}\Big(\tfrac{1+x}{1-x}\Big) = \frac{(1-x)\cdot(1)\ -\ (1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

נחזיר זאת חזרה לתוך הנגזרת:

$$= \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \times \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}.$$

עכשיו נקבל את התוצאה המלאה:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

לכן, בסופו של דבר מתקבלת הנגזרת הידועה:

$$\boxed{\Big(\tanh^{-1} x\Big)' \ = \ \frac{1}{1-x^2}\blacksquare}$$

הרחבה - סימונים

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$