משפטי ערך הביניים

סיכום שיעור

23:16:48 2025-01-15

תוכן העניינים

משפט רול

אם $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע הפתוח (a,b), ו-$f(a) = f(b)$, אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש-$f'(c) = 0$.

משפט לגרנג'

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b), אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

אינטואיטיבית, המשפט קובע שקיימת נקודה שהשיפוע שלה משיק למיתר המחבר בין שתי הנקודות.

הוכחת משפט לגרנג'

נגדיר

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

נשים לב שבהצבת $x = a$ ו-$x = b$ נקבל:

$$F(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \underbrace{(a-a)}_{=0}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

וכן

$$F(b) = f(b) - f(a) - \cancel{(b-a)}\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}} = 0$$

כלומר קיבלנו: $F(a) = F(b) = 0$. מכאן שהפונקציה $F(x)$ מקיימת את תנאי **משפט רול**, ולכן קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-$F'(c) = 0$.

נחשב את הנגזרת של $F(x)$ לפי x, תשומת הלב ש- $f(a)$ ו-$f(b)$ הם קבועים:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - \underbrace{f(a)'}_{0} - \underbrace{(x-a)'}_{1}\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \\ &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{aligned}$$

לפי משפט רול, בהכרח קיימת c כך ש $F'(c) = 0$, ולכן:

$$\begin{aligned} F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= 0 \\ f'(c) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

דוגמה לשימוש במשפט לגרנג

תהי $f(x) = \tan^{-1} x$ באינטרוול $a = 0, b = x > 0$.

ניזכר בנגזרת של הטנגנס ההפוכה. נציב $y = \tan^{-1} x$ ונקבל:

$$\begin{aligned} y &= \tan^{-1} x \\ \tan y &= x \\ \underbrace{\frac{y'}{cos^2 y}}_{\tan y' \cdot y + \tan y \cdot y'} &= 1 \\ y' &= \cos^2 y \\ &= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}} \end{aligned}$$

הבהרה למעבר שבשורה השלישית: גזרנו את שני האגפים. בשורה האחרונה הצבנו חזרה $\tan^2 y = x^2$. נזכור ש-$\tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$.

נחשב את הנגזרת של $f(x) = \tan^{-1} x$ באמצעות משפט לגרנג׳:

$$f'(c) = \frac{1}{1+c^2} \quad c \in (0,x)$$

נציב את ערכי הקצוות $a = 0, b = x > 0$ ונקבל:

$$\frac{1}{1+x^2} < \underbrace{\frac{\tan^{-1} x - \overbrace{\tan^{-1} 0}^{=0}}{x-0}}_{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} < \frac{1}{1+0^2} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{\tan^{-1} x}{x} < 1$$

כלומר קיבלנו את אי השוויון:

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$$

משפט קושי המוכלל

אם $f(x)$, $g(x)$ שתי פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירות בקטע הפתוח (a,b), אז קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

המשפט מתקבל ממשפט לגרנג' בעזרת $g(x) = x$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\underbrace{g(b)}_{=b} - \underbrace{g(a)}_{=a}} = \frac{f'(c)}{\underbrace{g'(c)}_{=1}} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

משפט להופיטל (גרסת "$\frac{0}{0}$")

אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ ו-$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, ושתי הפונקציות רציפות ב $[x_0, x_0+\delta]$ וגזירות ב-$(x_0, x_0+\delta)$, אז:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

דור: המרצה השתמש ב a ו b באופן שלא היה לי ברור, החלפתי באפסילון.

דוגמה לשימוש $\frac{\sin x}{x} = 1$

נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

נציב $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

דוגמה $\frac{e^x-1}{x}=1$

נחשב את הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

נציב $f(x)=e^x-1$, $g(x)=x$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$$

דוגמה מבחינה $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos 2x}$$

מדובר בגבול מהצורה $\frac{0}{0}$, הפונקציות רציפות וגזירות בקטע המתאים, ולכן נוכל להשתמש במשפט להופיטל:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\cos 3x}\cdot(-3\sin 3x)}{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-2\sin 2x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-3\tan 3x}{-2\tan 2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan 3x}{\tan 2x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{2}{\cos^2 2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

דוגמה $\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$

נשים לב שכאן מדובר בגבול מהצורה $0\cdot\infty$, ולכן לא נוכל להשתמש מיד במשפט להופיטל.

נעביר את הגבול לצורה אחרת:

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{x^2}^{f(x)}}{\underbrace{e^x}_{g(x)}}$$

כעת נוכל להשתמש במשפט להופיטל ולגזור:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

תרגול

עברו לדף פתרון תרגילים בנושא משפטי ערך הביניים לכל התרגילים והפתרונות, כולל פיתוח גבולות בעזרת כלל לופיטל.