שבוע 9 - סיכום שיעור בנושא נגזרות, מתמטיקה לרפואנים | MedInTzfat.com

2025-01-06 23:16:48

תוכן העניינים

חזרה - נגזרות

נזכיר כמה כללים שראינו:

$$(f\pm g)'=f'\pm g'$$

מכאן נובע למשל:

$$(\sin x + e^x)' = \cos x + e^x$$

נגזרת של מכפלה - כלל לייבניץ $(f(x) \cdot g(x))'$

הנגזרת של מכפלה לפי כלל לייבניץ לגזירה של מכפלה של פונקציות:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

ניתן להכליל את הכלל למספר פונקציות:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot ... \cdot f_n + ... + f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n'$$

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} f_j\right) \cdot f_i'$$

ובאופן פשוט יותר, נוכל לקבל:

$$((\sin x)e^x)' = \cos x e^x + \sin x e^x$$

$$= e^x(\cos x + \sin x)$$

דוגמה נוספת:

$$(x^2 \cdot \ln x \cdot \cos x)' = 2x \cdot \ln x \cdot \cos x + x \cdot \cos x - x^2 \cdot \ln x \cdot \sin x$$

נגזרת של הרכבה - כלל השרשרת $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

תהיי $y = g(x)$ ו-$u = f(y) \Rightarrow u(x) = f(g(x))$, אזי בכתיבת לייבניץ:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dy}{dx}$$

נזכיר שבכתיבה לפי גבולות:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

אבל מה המשמעות של $\frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$? זה פשוט גזירה מקוננת: גזור את החיצונית לפי הפנימית ואת הפנימית לפי היותר פנימית. כלומר f תלויה בארגומנט g ו-g תלויה ב-x.

דוגמה:

$$f(x) = \sin x^2 \Rightarrow f(u) = \sin u, u = x^2$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos \underbrace{u}_{x^2} \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

דוגמה $\left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

דוגמה נוספת: נוכל להציב f ו-g ולחשב את הנגזרת:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$g(x) = \sin x \Rightarrow g'(x) = \cos x$$

$$\left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

דוגמה: $\frac{d}{dx}\left[\sin(\cosh(x^3))\right] = \cos(\cosh(x^3)) \cdot \sinh(x^3) \cdot 3x^2$

דוגמה נוספת: נוכל להציב f, g ו-h ולחשב את הנגזרת:

$$f(g) = \sin h \Rightarrow f'(g) = \cos h$$

$$g(h) = \cosh h \Rightarrow g'(h) = \sinh h$$

$$h(x) = x^3 \Rightarrow h'(x) = 3x^2$$

לכן:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dh} \cdot \frac{dh}{dx} = \cos \cosh x^3 \cdot \sinh x^3 \cdot 3x^2$$

הוכחת נגזרת של מנה: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

תהי $f(x) = \frac{1}{g(x)}$, אז אפשר להסתכל על f כפונקציה של g ולהשתמש בכלל השרשרת:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = -\frac{1}{g^2} \cdot g'$$

שכן:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1(x)^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

מכאן נוכל גם להגיע לכלל המנה:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{1}{g}\cdot f\right)' = \left(\frac{1}{g}\right)'\cdot f + \frac{1}{g}\cdot f'$$

$$= -\frac{1}{g^2}\cdot g'\cdot f + \frac{f'}{g} = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

דוגמה $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

מתקיים:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$(\tan x)' = \frac{\overbrace{(\sin x)'}^{\cos x}\cdot\cos x - \sin x\cdot\overbrace{(\cos x)'}^{-\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

דוגמה $\left(\frac{e^x}{\tan x}\right)' = \frac{e^x\cdot\tan x - \frac{e^x}{\cos^2 x}}{\tan^2 x}$

מתקיים: ...

דוגמה $\left(\sin^{-1} x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

נעזר במשתנה עזר:

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$$

מכאן:

$$\sin(y(x)) = \sin(\sin^{-1} x) = x$$

$$\sin y(x) = x$$

$$[\cos y(x)]\cdot y'(x) = 1$$

$$y'(x) = \frac{1}{\cos y(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

דוגמה $\left(\tan^{-1}x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$

נעזר במשתנה עזר:

$$y = \tan^{-1}x \Leftrightarrow \tan y = x$$

מכאן:

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = 1 \Rightarrow y' = \cos^2 y = \frac{1}{\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

דוגמה - נגזרת של פונקציה הפוכה $\left(\tanh^{-1}x\right)' = \frac{1}{1-x^2}$

נציב בהגדרת $\tanh x$:

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cdot \cosh x - \sinh x \cdot \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

נשתמש שוב ב y כמשתנה עזר:

$$y = \tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \tanh y = x$$

מכאן:

$$\frac{y'}{\cosh^2 y} = 1 \Rightarrow y' = \cosh^2 y = \frac{1}{\tanh^2 y} = \frac{1}{1-\tanh^2 y} = \frac{1}{1-x^2}$$

נחשב גם ישירות:

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{1-x-(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{-2x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{-2x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{-2x}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$

נגזות של $\ln$

יושלם בע"ה.

גזירה כשהפונקציה ניתנת בצורה פרמטרית

נניח ש- $y = f(x)$ ניתן באופן פרמטרי. למשל:

$$f(x) = \begin{cases} y(t) \\ x(t) \end{cases}$$

למשל:

$$x^2 + y^2 = R^2 \begin{cases} y(t) = R\sin t \\ x(t) = R\cos t \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$$

נסמן:

$$y = f(t)$$

$$x = g(t)$$

אזי:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

למשל אם:

$$x = t^3$$

$$y = t^2$$

אזי:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t}{3t^2} = \frac{2}{3t} = \dots$$

יושלם בעתיד בע"ה.

תרגול

2. גזרו באמצעות הגדרת הנגזרת: א. $f(x) = \sqrt{2x-1}$ בנקודה $x_0 = 5$

פתרון:

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(5+h)-1} - \sqrt{2\cdot 5 - 1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h} - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{9+2h} - 3)(\sqrt{9+2h} + 3)}{h(\sqrt{9+2h} + 3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{9+2h-9}{h(\sqrt{9+2h}+3)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{(\sqrt{9+2h}+3)} = \frac{1}{3}$$

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

א. מצאו את נגזרת הפונקציה לכל x. ב. האם הנגזרת רציפה בנקודה 1?

פתרון: לכל x≠1 נבצע חלוקה ארוכה לגזירה קלה יותר

לבעבוע קודם מחלקים ארוכים ומקבלים:

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2+x+1$$

וכעת מכה יותר קל לגזור את הפולינום ולקבל:

$$f'(x) = 2x+1 \quad \text{לכל } x \neq 1$$

לגבי הגדרה:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+(1+h)+1-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2+1+h+1-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h+h^2}{h} = 3$$

לכן $f'(x)$ הוא פונקציה רציפה בנקודה 1 כי:

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1}(2x+1) = 3 = f'(1)$$

והפונקציה רציפה לכל x.

6. גזרו את הפונקציות הבאות בכל דרך שתיראה לכם:

א. $f(x) = \sqrt{\sin x - x\cos x}$

פתרון:

נגדיר $h(x) = \sin x - x\cos x$, $g(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin x - x\cos x}} \cdot (\cos x - \cos x + x\sin x)$$

$$= \frac{x\sin x}{2\sqrt{\sin x - x\cos x}}$$

ו. $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

פתרון:

נכתוב כלוג ונגזור:

$$\ln f(x) = \cos x \ln(\sin x)$$

נשים לב ש-$\sin x > 0$ ונגזור לפי שרשרת:

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot [-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}]$$

י. $f(x) = \sinh x(\cos x(\ln x))$

זה נדרש תחום הגדרה של הפונקציה $x > 0$

נגזור לפי כלל המכפלה:

$$f'(x) = \sinh x \cdot \cos x \cdot \ln x + \sinh x \cos x \cdot \frac{1}{x} + \cosh x \cos x \ln x - \sinh x \sin x \ln x$$

גזירת הפיכות

8. גזרו את הפונקציות ההפוכות באמצעות שתי שיטות, פעם אחת באמצעות הגדרת הפונקציה ההפוכה ופעם שניה באמצעות הביטוי המפורש של הפונקציה ההפוכה למשל:

$$f(x) = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

בדקו שאתם מגיעים לאותן תוצאות בשתי השיטות.

א. $f(x) = \sinh^{-1} x$

דרך ראשונה:

$$x = \sinh(y) = \sinh(\sinh^{-1}(x))$$

$$1 = \sinh\left(\sinh^{-1}(x)\right) = \cosh\left(\sinh^{-1}(x)\right) \cdot \left(\sinh^{-1}(x)\right)'$$

$$\Rightarrow \left(\sinh^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\cosh\left(\sinh^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\sinh^{-1}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

דרך שניה:

ידוע ש-$\sinh^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}}{\sqrt{x^2+1}\cancel{(x+\sqrt{x^2+1})}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

דרך שלישית לפי נגזרת של פונקציה הפוכה:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

9. גזרו את הפונקציות ההפוכות:

א. $f(x) = \cos^{-1}(\sin x)$

לפי כלל נגזרת הפונקציה ההפוכה + כלל פונקציה מורכבת:

$$(\cos^{-1}(h(x)))' = \frac{h'(x)}{\cos(\cos^{-1}(h(x)))} = \frac{h'(x)}{-\sin(\cos^{-1}(h(x)))}$$

כאשר $h(x) = \sin x$, נציב:

$$(\cos^{-1}(\sin x))' = \frac{-\cos x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x+k\pi)} = \frac{-\cos x}{|\cos x|} = \begin{cases} -1 & \cos x > 0 \\ 1 & \cos x < 0 \\ \text{undefined} & \cos x = 0 \end{cases}$$

כאשר $\frac{\pi}{2} - x + k\pi \in (2\pi)$

$0 \le \frac{\pi}{2} - x + k\pi < \pi$

$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{k} \le x \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{k}$