סיכום הרצאה ותרגול בנושא אינטגרלים | מתמטיקה לרפואנים

סיכום שיעור ופתרון תרגילים (M9)

21:18:36 2025-02-17

תוכן העניינים

מבוא תיאורטי 2
האינטגרל המסוים 2
פונקציה קדומה 2
"הנוסחה היסודית" של החשבון האינפיניטסימלי 2
טכניקות למציאת פונקציה קדומה 3
משפט ערך הביניים עבור אינטגרלים 3
"המשפט היסודי" של החשבון האינטגרלי 4
סכום רימן 4
שיטות אינטגרציה 4
הבהרה: אינטגרל בלתי מסוים לעומת אינטגרל מסוים 4
רשימה בסיסית של נוסחאות אינטגרציה 5
כלל הלינאריות 5
אינטגרציה של פונקציה מהצורה $f(\alpha x+\beta)$ 6
אינטגרציה בחלקים 6
כלל ההצבה 7
דוגמה: $\int f(x)f'(x)dx$ 8
דוגמה: $\int \sin x\cos x dx$ 8
דוגמה: $\int f'(x)e^{f(x)}dx$ 8
הנגזרת הלוגריתמית 8
דוגמה: $\int \tan x dx$ 8
דוגמא: $\int \tanh x dx$ 9
שיטת ההצבה - גרסה שנייה 9
הצבות מומלצות 9
דוגמה: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 10
דוגמה: $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$ 11
תרגול 11
$\int_0^\pi e^x \sin x dx$ 11
M9 - תרגיל מס 9 12
שאלה 1. אינטגרל כדיפרנציאל 12
שאלה 2: אינטגרלים בלתי מסוימים 14
שאלה 4: אינטגרלים מסוימים 20
שאלה 5 - ליפים ולאמיצים שאינם עצלנים 25
שאלה 6 26

שאלה 7 26
שאלה 8 27

מבוא תיאורטי

להלן סיכום של ההרצאה מיום 29 בינואר 2025 והתרגול בנושא. שילבתי הגדרות ומשפטים מהקורס **אינפי 2** באוניברסיטה הפתוחה. החלק הבא לא הוגדר בכתה מובא לשלמות ולתיעוד. לתרגילים מומלץ לדלג לחלק על שיטות אינטגרציה.

האינטגרל המסוים

פונקציה f חסומה ב-$[a,b]$ נקראת **אינטגרבילית ב-**$[a,b]$ אם האינטגרל התחתון שלה בקטע זה שווה לאינטגרל העליון שלה בקטע זה. כלומר, אם:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \Rightarrow f \text{ is integrable in } [a,b]$$

אם פונקציה חסומה f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז הערך המשותף של האינטגרל העליון והתחתון של f בקטע מכונה **האינטגרל המסוים** של f מ- a עד b.

הביטוי שבתוך $f(t)$ נקרא **אינטגרנד**.

פונקציה קדומה

"פונקציה קדומה" $F(x)$ היא בעצם "אנטי נגזרת" (**Antiderevative**) של $f(x)$.

דוגמה 1: מהי קבוצת הפונקציות הקדומות של $f(x)=x^n$?

$$F(x)=\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

כאשר C היא קבוע שרירותי.

דוגמה 2: מהי קבוצת הפונקציות הקדומות של $f(x)=\cos(x)$?

$$F(x)=\int \cos(x)dx=\sin(x)+C$$

"הנוסחה היסודית" של החשבון האינפיניטסימלי

ניתן להשתמש **בפונקציה קדומה** F של f כדי לחשב את השטח מתחת לגרף הפונקציה בין a ל-b. כלומר:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)}$$

דוגמה: $y=x^2$ מהו השטח מתחת לגרף הפונקציה $y=x^2$ בין $x=0$ ל-$x=1$?

$$S=\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

דוגמה: $f(x) = \cos x$ מהו השטח מתחת לגרף הפונקציה $f(x) = \cos x$ בין $x = 0$ ל-$x = \frac{\pi}{2}$?

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$$

טכניקות למציאת פונקציה קדומה

הוצאת קבוע

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

טרנזיטיביות

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

אדיטיביות

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

כאשר $a \le b \le c$.

החלפת גבולות האינטגרציה משנה סימן

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

אינטגרל של פונקציה זוגית ואי זוגית

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & f(x) \text{ is even} \\ 0 & f(x) \text{ is odd} \end{cases}$$

דוגמה $\int_{-3}^3 x^{17}e^{x^2}dx$

$$\int_{-3}^3 x^{17}e^{x^2}dx = 0$$

משפט ערך הביניים עבור אינטגרלים

אם $\int_a^b f(t)dt$ הוא השטח מתחת לפונקציה $f(x)$ בין הנקודות a ל-b, אז מתקיים:

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = (b-a)\cdot f(\xi)}$$

כאשר $\xi \in [a,b]$. כלומר, קיימת נקודה בין a ל-b שבה הפונקציה קובעת את השטח.

"המשפט היסודי" של החשבון האינטגרלי

בתנאים מסוימים (לא הורחבו בכתה) מתקיים הקשר הבא בין האינטגרל הבלתי מסוים F_a והפונקציה f, או במילים אחרות - בין f לבין פונקציה קדומה שלה F:

$$\boxed{F_a'(x) = f(x)}$$

מהמשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי נובע שהנגזרת של האינטגרל הבלתי מסוים היא הפונקציה f:

$$\frac{dF(x_0)}{dx_0} = F'(x_0) = f(x_0)$$

סכום רימן

$$\begin{aligned}\sigma &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow \int_a^x f(t)dt = F_a(x)\end{aligned}$$

שיטות אינטגרציה

הבהרה: אינטגרל בלתי מסוים לעומת אינטגרל מסוים

אינטגרל מסויים הוא השטח מתחת לגרף הפונקציה f בין a ל-b. כלומר, הוא **מספר**, שערכו הוא השטח:

$$S_{ab}^f = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

לעומת זאת, **אינטגרל בלתי מסוים** של f בקטע $[a,b]$ הוא **פונקציה:**

$$\boxed{F_c(x) = \int_c^x f(t)dt}$$

הערות:

- ההגדרה של "אינטגרל" בשיעור לא כללה במפורש התייחסות לקטע, או לפונקציה f שאינטגרבילית בו. המהות של אינטגרל בלתי מסוים, להבנתי, הוא שלפונקציה f יש לרוב **מספר** אינטגרלים בלתי מסוימים בקטע, אשר נבדלים זה מזה בקבוע, ומשכך נקראים **בלתי מסוימים**.
- בשיעור הוצגו "רישומים מקוצרים" שלדעתי עשויים לבלבל:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \underbrace{\int f(x)dx}_{\text{The integral of } f(x)}$$

- הסימון $\int f(x)dx = F(x) + C$ משמש לתיאור **אוסף כל הפונקציות הקדומות של** f **ב-**I ומסומן כך:

$$\int f(x)dx = \{F(X) : F'(x) = f(x), x \in I\}$$

רשימה בסיסית של נוסחאות אינטגרציה

נגזרת	אינטגרציה
$C' = 0$	$\int 0\,dx = C$
$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha, \quad \alpha \neq -1$	$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$
בפרט עבור $a = 0$ $(x)' = 1$	$\int 1\,dx = x + C$
$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$
$(-\cos x)' = \sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$(-\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
עבור $a > 0, a \neq 1$ $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$

הערה לגבי $\ln|x|$ **כאשר** $x < 0$ נחשב את הנגזרת:

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

כלל הלינאריות

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$$

כאשר $F(x)$ ו-$G(x)$ הן פונקציות קדומות של $f(x)$ ו-$g(x)$ בהתאמה.

ברישום מקובל יותר, שמתעלם מהקבוע השרירותי C:

$$\boxed{\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx}$$

באופן כללי, אפשר להרחיב את הכלל ל n פונקציות (הוכחה באינדוקציה על n):

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x))dx =$$
$$\alpha_1 \int f_1(x)dx + \alpha_2 \int f_2(x)dx + \cdots + \alpha_n \int f_n(x)dx$$

אינטגרציה של פונקציה מהצורה $f(\alpha x+\beta)$

$$\boxed{\int f(\alpha x+\beta)dx=\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+C}$$

הערה: מדובר במקרה פרטי של **שיטת ההצבה** (להלן), שכן עבור α, β ממשיים ואלפה שונה מאפס $\int f(\alpha+\beta)dx$ ניתן לחישוב בעזרה ההצבה:

$$\begin{aligned} t &= \alpha x+\beta \\ dt &= \alpha dx \qquad \Rightarrow dx=\frac{1}{\alpha}dt \end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \int f(\alpha x+\beta)dx &= \int f(t)\frac{1}{\alpha}dt \\ &= \frac{1}{\alpha}F(t)+C \\ &= \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)+C \end{aligned}$$

אינטגרציה בחלקים

$$\begin{aligned} \int u(x)v'(x)dx &= u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx \\ &= u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx \end{aligned}$$

או בכתיב מקוצר:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

$$\boxed{\int uv'=uv-\int vu'}$$

ביחס לאינטגרל מסוים אינטגרציה בחלקים מתייחסת לנוסחה: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

דוגמה: $\int \ln x dx$

השאלה הופיעה בשיעורי הבית כדוגמה לאינטגרציה בחלקים.

נשתמש **באינטגרציה בחלקים** כאשר:

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x \quad v'(x)=1 \\ u'(x) &= \frac{1}{x} \qquad v(x)=x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx = \int uv' &= uv - \int vu' \\ &= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx \\ &= x\ln x - \int dx \\ &= \boxed{x\ln x - x + C}\end{aligned}$$

דוגמה: $\int x\ln x dx$ נשתמש **באינטגרציה בחלקים** כאשר:

$$\begin{aligned}u(x) &= \ln x \quad v'(x) = x \\ u'(x) &= \frac{1}{x} \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x\ln x dx = \int v'x &= uv - \int vu' \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\ln x dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx \\ &= \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C}\end{aligned}$$

כלל ההצבה

כלל ההצבה מאפשר לחשב את $\int f(x)dx$ בעזרת ביטוי מהצורה $f(x) = g(\phi(x))\phi'(x)$:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int g(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t=\phi(x)}}$$

או בכתיב מקוצר:

$$\boxed{\int g(\phi(x))\phi'(x)dx = \int g(t)dt}$$

דרך נוספת להשתמש בכלל ההצבה שמייתרת את הנוסחה היא להסתכל על הביטוי $\phi'(x)dx$ כדפרנציאל של הפונקציה $\phi(x) = t$. פורמאלים, נסמן $t = \phi(x)$, $dt = \phi'(x)dx$ ונקבל:

$$\int g(\underbrace{\phi(x)}_{t})\underbrace{\phi'(x)dx}_{dt} = \int g(t)dt$$

דוגמה: $\int f(x)f'(x)dx$

$$\int f(x)f'(x)dx = \int f df = \frac{f^2}{2} + C$$

דוגמה: $\int \sin x \cos x dx$

נסמן $\phi(x) = \sin x$ ונקבל:

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos x dx &= \int \phi(x)\phi'(x)dx \\ &= \frac{\phi^2(x)}{2} + C \\ &= \boxed{\frac{\sin^2 x}{2} + C}\end{aligned}$$

דוגמה: $\int f'(x)e^{f(x)}dx$

נסמן $\phi(x) = e^{f(x)} = t$ ונקבל:

$$\begin{aligned}\int f'(x)e^{f(x)}dx &= \int dt \\ &= t + C \\ &= \boxed{e^{f(x)} + C}\end{aligned}$$

אפשר גם לזהות מיד ש-$\phi'(x) = f'(x)e^{f(x)} = dt$.

הנגזרת הלוגריתמית

מדובר במקרה פרטי של כלל ההצבה עבור $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$: נסמן $t = f(x)$ ונקבל $dt = f'(x)dx$ ולכן:

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t| + C \\ &= \ln|f(x)| + C\end{aligned}$$

דוגמה: $\int \tan x dx$

דרך מפורטת יותר - כמו שהמרצה פתר בכתה:

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x dx}{\cos x} \\ &= \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} \\ &= -\int \frac{dt}{t} \\ &= -\ln|t| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

תזכורת: $df = f'dx$

דוגמא: $\int \tanh x dx$

נסמן $\phi(x) = \cosh x$, אז $\phi'(x) = \sinh x dx$ ונקבל:

$$\begin{aligned}\int \tanh x dx &= \int \frac{\sinh x}{\cosh x} dx \\ &= \ln|\cosh x| + C\end{aligned}$$

בגלל ש-$\cosh x$ תמיד חיובית, ניתן לוותר על הערך המוחלט:

$$\int \tanh x dx = \ln \cosh x + C$$

השתמשנו בטכניקה שהיא סוג של החלפת משתנה שכן $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \|f(x)\| + C$ במקרה הזה: $f(x) = \cosh x$.

שיטת ההצבה - גרסה שנייה

לפעמים נוח יותר להציב $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)dt$. מחשבים את האינטגרל $\int f(\phi(t))\phi'(t)dt$ ואז חוזרים למשתנה הישן x על ידי הצבה הפוכה: $t = \phi^{-1}(x)$.

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

הצבות מומלצות

- כאשר האינטגרנד מוכב מסכומים, הפרשים, מכפלות ומנות של $\sqrt{a^2 - x^2}$, מומלץ לנסות להציב $x = a \sin t$.
- כאשר האינטגרנד מוכב מסכומים, הפרשים, מכפלות ומנות של $\sqrt{a^2 + x^2}$, מומלץ לנסות להציב $x = a \tan t$.
- כאשר האינטגרנד מוכב מסכומים, הפרשים, מכפלות ומנות של $\sqrt{x^2 - a^2}$, מומלץ לנסות להציב $x = \frac{a}{\cos t}$.

דוגמה: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

נציב $x = a\sin t$, אז:

$$\begin{aligned} x = a\sin t \Rightarrow dx &= d(a\sin t) \\ &= a\cos t dt \end{aligned}$$

מכאן:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} \\ &= \sqrt{a^2\cos^2 t} \\ &= a\cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{a\cos t dt}{a\cos t} \\ &= \int dt \\ &= t + C\Big|_{t=\arcsin\frac{x}{a}} \end{aligned}$$

הצבנו $x = a\sin t$, אז $sint = \frac{x}{a}$ ולכן $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

סך הכל קיבלנו:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \boxed{\arcsin\frac{x}{a} + C}$$

הערה: בשיעור המרצה דווקא בחר להציב $x = a\cos t$, אז:

$$\begin{aligned} x = a\cos t \Rightarrow dx &= d(a\cos t) \\ &= -a\sin t dt \end{aligned}$$

מכאן:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-a^2\cos^2 t} \\ &= \sqrt{a^2\sin^2 t} \\ &= a\sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{-a\sin t dt}{a\sin t} \\ &= -\int dt \\ &= -t + C\Big|_{t=\arccos\frac{x}{a}} \end{aligned}$$

סך הכל קיבלנו:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \boxed{-\arccos\frac{x}{a}+C}$$

הבהרה: שתי התשובות נכונות בגלל שקיים הבדל של קבוע בתוצאה הסופית: $\arccos\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{a}$. אז ההבדל נכלל בקבוע C.

דוגמה: $\int \frac{dx}{x^2+a^2}$

השאלה הופיעה בשיעורי הבית

נציב $x = a\tan t$, לכן $dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt$

נציב:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{(a\tan t)^2+a^2}\\ &= \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{a^2(\tan^2 t+1)}\\ &= \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{a^2(\frac{1}{cos})^2}\\ &= \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{a^2\frac{1}{\cos^2 t}}\\ &= \int \frac{dt}{a}\\ &= \frac{1}{a}t\Big|_{t=\arctan(\frac{x}{a})}\\ &= \boxed{\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C}\end{aligned}$$

עקרונית היה גם ניתן להשתמש מיד באינטגרל האלמנטי $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$.

שימו לב לזהות הטריגונומטרית: $1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. זהות לא נכונה, כמו $1+\sin^2 t = \cos^2 t$ יכולה להביא לטעות (הזהות המתאימה כאשר יש לי סינוס וקוסינוס בריבוע היא $1-\sin^2 t = \cos^2 t$).

תרגול

פיתרו את האינטגרלים הבאים.

$\int_0^\pi e^x \sin x dx$

רמז: השתמשו בחוק ההפרדה.

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x\Big|_0^\pi - \int e^x \cos x dx$$

M9 - תרגיל מס 9

שאלה 1. אינטגרל כדיפרנציאל

אנו יודעים ש-

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

הראו:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}$$

ובפרט:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{2\sin(x^2) - \sin(x)}{x}$$

פתרון אפתור לאט לפי השלבים שלמדנו:

$$\begin{aligned}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= \int_{u(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt \\ &= \int_a^{v(x)} f(t)dt - \int_a^{u(x)} f(t)dt\end{aligned}$$

נפעיל את פעולת הנגזרת על שני האגפים:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= \frac{d}{dx}\left(\int_a^{v(x)} f(t)dt - \int_a^{u(x)} f(t)dt\right) \\ &= \frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f(t)dt - \frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt\end{aligned}$$

נסתכל על $\frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f(t)dt$. זה דומה לנתון המקורי $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, רק שבמקום x יש לנו $v(x)$. המשפט המקורי נובע מכלל השרשרת - הנגזרת של האינטגרל $F_a(x)$ היא $f(x)\cdot\frac{d}{dx}x = f(x)$ (כאשר $\frac{d}{dx}x = 1$). האינטגרלים במקרה הזה הם פונקציות של x עם גבולות עליונים $v(x)$ ו-$u(x)$ בהתאמה.

לכן, לפי כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f(t)dt = f(v(x))\cdot\frac{d}{dx}v(x)$$

באופן דומה:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt = f(u(x)) \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

נציב בחזרה במשוואה המקורית:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= \frac{d}{dx}\int_a^{v(x)} f(t)dt - \frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt \\ &= \boxed{f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}}\end{aligned}$$

1) לגבי החלק השני, נציב:

- $f(t) = \frac{\sin t}{t}$
- $v(x) = x^2$
- $u(x) = x$

2) נציב בנוסחה שהוכחנו:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

3) נחשב את הנגזרות:

$$= \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin(x)}{x} \cdot 1$$

4) נכפול את האיבר הראשון:

$$= \frac{2x\sin(x^2)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x}$$

5) נפשט את האיבר הראשון:

$$= \frac{2\sin(x^2)}{x} - \frac{\sin(x)}{x}$$

6) נוציא מחוץ לשבר:

$$= \frac{2\sin(x^2) - \sin(x)}{x}$$

שאלה 2: אינטגרלים בלתי מסוימים

$\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$

רמז: המונה מתכונותי לנגזרת של המכנה

אינטגרציה בחלקים? לא. הצבה.

$$\begin{aligned} t = a^2 + x^2 &\Rightarrow dt = 2xdx \\ &\Rightarrow xdx = \frac{dt}{2} \end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{x^2+a^2} &= \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt \\ &= \frac{1}{2}\ln(t)\Big|_{t=a^2+x^2} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(a^2+x^2) + C \end{aligned}$$

העיבר שבתוך ln בכל מקרה חיובי אז ויתרתי על סימן הערך המוחלט.

$\int \frac{x^2dx}{x^2+a^2}dx$

$\int \cot xdx$

$$\begin{aligned} &\int \cot xdx = \int \frac{\cos xdx}{\sin x} \\ &\text{let } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos xdx \\ &\int \frac{\cos xdx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \ln\|t\|\Big|_{t=\sin x} + C \\ &\qquad = \ln\|\sin x\| + C \end{aligned}$$

$\int \frac{\cot(\ln x)dx}{x}$

$$\begin{aligned}
&\text{let } t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx\\
\int \frac{\cot(\ln x)dx}{x} &= \int \cot(t)dt\\
&= \ln\|\sin t\|\Big|_{t=\ln x}+C\\
&= \boxed{\ln\|\sin(\ln x)\|+C}
\end{aligned}$$

$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx$

פתרון:

נציב:

$$\begin{aligned}
&t=x^2+4x-6\\
&\Rightarrow dt=(2x+4)dx \Leftrightarrow \frac{dt}{2}=(x+2)dx
\end{aligned}$$

מכאן:

$$\begin{aligned}
\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx &= \int \frac{1}{2}\sin(t)dt\\
&= -\frac{1}{2}\cos(t)\Big|_{t=x^2+4x-6}+C\\
&= \boxed{\frac{1}{2}\cos\left(x^2+4x-6\right)+C}
\end{aligned}$$

שימו לב: האינטגרל של sin הוא cos $-$.

$\int \tanh x dx$

נציב $t=\cosh x \Rightarrow dt=\sinh x dx$.

שימו לב: בנגזרת של cosh אין מינוס.

נקבל:

$$\begin{aligned}
\int \tanh x dx &= \int \frac{dt}{t}dt\\
&= \ln\|t\|\Big|_{t=\cosh x}+C\\
&= \boxed{\ln\|\cosh x\|+C}
\end{aligned}$$

אפשר גם לוותר על סימן הערך המוחלט כיוון ש cosh חיובית.

$\int 2^{-x}\tanh 2^{1-x}dx$

נציב $t=2^{1-x}\Rightarrow dt=-2^{1-x}\ln 2dx$.

השתמשתי בנגזרת של ביטוי מהצורה $(a^f)'=a^f\ln f\cdot f'$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}2^{1-x}&=2^{1-x}\cdot\ln(2)\cdot -1\\&=-2^{1-x}\cdot\ln(2)\end{aligned}$$

מכאן:

$$dx=-\frac{dt}{2^{1-x}\ln 2}$$

נציב:

$$\begin{aligned}\int 2^{-x}\tanh 2^{1-x}dx&=\int 2^{-x}\tanh t\cdot -\frac{dt}{2^{1-x}\ln 2}\\&=-\frac{1}{\ln 2}\int\tanh t dt\\&=-\frac{1}{\ln 2}\ln\|\cosh t\|+C\\&=\boxed{-\frac{1}{\ln 2}\ln\|\cosh 2^{1-x}\|+C}\end{aligned}$$

$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$

הערה: בתרגיל הבית נכתב כך: $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$, להבנתי יש שם פעמיים dx לא במכוון. נניח שהכוונה היא לאחד מהם.

נשלים את המכנה לריבוע בצורה הבאה:

$$\begin{aligned}x^2+x+1&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\\&=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

ואז יש לנו ביטוי מהצורה $\sqrt{z^2+a^2}$. נציב:

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{2}\right)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t\\x&=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t-\frac{1}{2}\\dx&=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 t}dt\end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} \\
&= \int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t - \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{\tan^2 t + 1}\right)} \\
&= \int \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\left(\frac{1}{\cos t}\right)} \\
&= \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\cos t}dt \\
&= \int \frac{\sqrt{3}\sin t}{2\cos^2 t}dt - \int \frac{1}{2\cos t}dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos t}dt
\end{aligned}$$

הפתרון של האינטגרל $\int \frac{1}{\cos t}dt$ הוא $\ln\left\|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right\| + C$. אפשר להוכיח את זה בנפרד בצורה מעט ארוכה (כופלים את המונה ואת המכנה ב-$\cos t + \sin t$ ומפצלים לשני אינטגרלים).

כדי לפתור את האינטגרל $\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$ נשים לב שהוא דומה לנגזרת של $\cot t$. נציב $u = \cos t$ ונקבל $du = -\sin t dt$. נקבל:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt &= -\int \frac{du}{u^2} \\
&= -\int u^{-2}du \\
&= -\frac{u^{-1}}{-1} + C \\
&= \frac{1}{u} + C \\
&= \frac{1}{\cos t} + C
\end{aligned}$$

נחזור ונציב באינטגרל המקורי:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos t}dt \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\cos t} + C\right) - \frac{1}{2}\left(\ln\left\|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right\| + C\right)
\end{aligned}$$

נבטא חזרה ב-x. נזכיר שהצבנו:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos t} &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+(2x+1)^2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4x^2+4x+1}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x^2+4x+4}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}\end{aligned}$$

נציב:

$$\begin{aligned}&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}+C\right)-\frac{1}{2}\left(\ln\left\|\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right\|+C\right)\\ &= \boxed{\frac{3}{4\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right\|+C}\end{aligned}$$

הערה: ייתכן שגם תשובות אחרות יהיו נכונות בגלל שהפתרון כולל קבוע C.

$$\int x\ln x dx$$

נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}v' = x\,, u = \ln x \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}\; u' &= \frac{1}{x}\\ \int x\ln x dx &= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx\\ &= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C\\ &= \boxed{\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}+C}\end{aligned}$$

$$\int 3^{\sqrt{2x+1}}dx$$

נציב

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{2x+1} \\ t^2 &= 2x+1 \\ \frac{t^2-1}{2} &= x \\ tdt &= dx \end{aligned}$$

נקבל:

$$\int 3^{\sqrt{2x+1}} dx = \int 3^t \cdot tdt$$

צריך להיזהר לא לפספס את ה t בצד ימין. נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned} v' = 3^t \,, u = t \Rightarrow v &= \frac{3^t}{\ln 3}\, u' = dt \\ \int 3^t \cdot tdt &= \frac{3^t}{\ln 3} \cdot t - \int \frac{3^t}{\ln 3} dt \\ &= \frac{3^t}{\ln 3} \cdot t - \frac{3^t}{(\ln 3)^2} + C \\ &= \boxed{\frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{\ln 3} \cdot \sqrt{2x+1} - \frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{(\ln 3)^2} + C} \end{aligned}$$

אפשר גם לבחור במשתנים אחרים עבור האינטגציה בחלקים, אבל זה פחות יעזור:

$$\begin{aligned} v' = t \,, u = 3^t \Rightarrow v &= \frac{t^2}{2}\, u' = 3^t \ln 3 \\ \int 3^t \cdot tdt &= \frac{t^2}{2} \cdot 3^t - \int \frac{t^2}{2} \cdot 3^t \ln 3 dt \\ &= \frac{t^2}{2} \cdot 3^t - \frac{1}{2} \int t^2 \cdot 3^t \ln 3 dt \\ &= \frac{\sqrt{2x+1}}{2} \cdot 3^{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2} \int (\frac{t^2-1}{2}) \cdot 3^t \ln 3 dt \end{aligned}$$

$\int x^n \ln x dx$

נפריד למקרים:

כאשר $n = -1$:

$$\begin{aligned} \int x^{-1} \ln x dx &= \int \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \end{aligned}$$

כאשר $n \neq -1$:

נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned} v' = x^n \,, u = \ln x \Rightarrow v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \, u' = \frac{1}{x} \\ \int x^n \ln x dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C} \end{aligned}$$

$\int \tan^{-1} x dx$

נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned} v' = 1 \,, u = \tan^{-1} x \Rightarrow v = x \, u' = \frac{1}{1+x^2} \\ \int \tan^{-1} x dx &= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln \|1+x^2\| + C \end{aligned}$$

שאלה 4: אינטגרלים מסוימים

$\int_0^\pi \sin x dx$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x dx &= -\cos x \Big|_0^\pi \\ &= -\cos \pi + \cos 0 \\ &= -(-1) + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

שימו לב: $\cos \pi = -1$ ו$\cos 0 = 1$. חשוב להכיר את הערכים האלה ולא להבלבל במעגל היחידה.

$\int_0^\pi e^x \sin x dx$

בשאלה הזאת נשתמש פעמיים באינטגרציה בחלקים כדי לקבל ביטוי מהצורה $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}$**Some expression**.

$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$u = \sin x \Rightarrow u' = \cos x$$
$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$
$$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$$
$$u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x$$
$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx$$
$$\Rightarrow \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x - \sin x dx\right)$$
$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$
$$2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

חשוב עכשיו להיזהר כשאנחנו מציבים חזרה את הגבולות של האינטגרל. צריך גם להציב בחזקה של e וגם בפונקציות הטריגונומטריות.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi e^x \sin x dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \Big|_0^\pi \\
&= \frac{1}{2} e^\pi (\sin \pi - \cos \pi) - \frac{1}{2} e^0 (\sin 0 - \cos 0) \\
&= \frac{1}{2} e^\pi (0 - (-1)) - \frac{1}{2} e^0 (0 - 1) \\
&= \frac{1}{2} e^\pi + \frac{1}{2} e^0 \\
&= \frac{1}{2} e^\pi + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2} (e^\pi + 1)}
\end{aligned}$$

$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^2 \sin x dx$

נשתמש שוב באינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\begin{aligned}
v' &= \sin x \Rightarrow v = -\cos x \\
u &= x^2 \Rightarrow u' = 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x - \int -2x \cos x dx \\
&= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v' &= \cos x \Rightarrow v = \sin x \\
u &= x \Rightarrow u' = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) \\
&= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - (-\cos x) \right) \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^2 \sin x dx = -\left(\sqrt{\pi}\right)^2 \cos \sqrt{\pi} + 2\sqrt{\pi} \sin \sqrt{\pi} + 2 \cos \sqrt{\pi}$$

$$= \left(-\pi \cos \sqrt{\pi} + 2\sqrt{\pi} \sin \sqrt{\pi} + 2 \cos \sqrt{\pi}\right) - \left(0 \cos 0 + 0 \sin 0 + 2 \cos 0\right)$$

$$= \boxed{-\pi \cos \sqrt{\pi} + 2\sqrt{\pi} \sin \sqrt{\pi} + 2 \cos \sqrt{\pi} - 2}$$

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(3-x)}} dx$

נתחיל מפישוט המכנה:

$$\begin{aligned}
(x+2)(3-x) &= 3x - x^2 + 6 - 2x \\
&= -x^2 + x + 6 = -\left(x^2 - x - 6\right) \\
&= -(x^2 - x - \frac{1}{4} - \frac{25}{4}) \\
&= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \\
&= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

קיבלנו ביטוי מהצורה $\sqrt{a^2 - x^2}$. נציב $\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \sin t$:

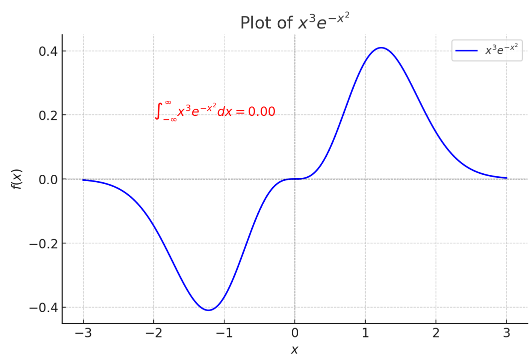
$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{25}{4} \sin^2 t \\
x - \frac{1}{2} &= \frac{5}{2} \sin t \\
x &= \frac{5}{2} \sin t + \frac{1}{2} \\
dx &= \frac{5}{2} \cos t dt
\end{aligned}$$

הבהרה להצבה: הסיבה להציב סינוס נובעת מכך ש $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$. כאשר הפונקציה הפיכה של הסינוס היא sin ולכן נציב סינוס.

נציב:

$\int_{-\inf}^{\inf} x^3 e^{-x^2} dx$

נעזר בכך ש$f(-x) = -f(x)$ ונקבל שהאינטגרל הוא 0.



$x^3 e^{-x^2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x dx$

נפתור בעזרת הצבה:

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos x dx = \int_0^1 t^6 dt$$
$$= \left.\frac{t^7}{7}\right|_0^1$$
$$= \boxed{\frac{1}{7}}$$

הערה: הגבולות של האינטגרל משתנים בהתאם להצבה. $t = \sin x$ ולכן הגבול התחתון הוא 0 והעליון הוא 1, כי $\sin 0 = 0$ ו$\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

$\int_0^{\pi} x \cos(3x) dx$

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u = x, \quad v' = \cos(3x)$$
$$u' = 1, \quad v = \frac{1}{3}\sin(3x)$$
$$\int_x \cos(3x)dx = \frac{x}{3}\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)dx$$

נציב $t = 3x$:

$$\Rightarrow dt = 3dx \to dx = \frac{1}{3}dt$$

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)dx &= \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt \\ &= -\frac{1}{3}\cos t\Big|_{t=3x} + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos 3x + C\end{aligned}$$

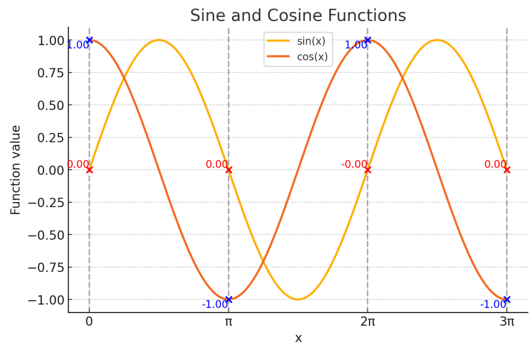
נחזור לאינטגרל:

$$\begin{aligned}\int_x \cos(3x)dx &= \frac{x}{3}\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)dx \\ &= \frac{x}{3}\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C\end{aligned}$$

נציב באינטגל המסוים:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(3x)dx &= \frac{x}{3}\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{3}\sin(3\pi) + \frac{1}{9}\cos 3\pi - \left(\frac{0}{3}\sin(3\cdot 0) + \frac{1}{9}\cos 0\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\underbrace{\sin(3\pi)}_{0} + \frac{1}{9}\underbrace{\cos 3\pi}_{-1} - 0 - \frac{1}{9} \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \boxed{-\frac{2}{9}}\end{aligned}$$

חשוב לא להתבלבל בערכים המוכרים של קוסינוס וסינוס:



$$\sin 2\pi = 0 \, , \sin \tfrac{3\pi}{2} = -1 \, , \sin \pi = 0 \, , \sin \tfrac{\pi}{2} = 1 \, , \sin 0 = 0$$
$$\cos 2\pi = 1 \, , \cos \tfrac{3\pi}{2} = 0 \, , \cos \pi = -1 \, , \cos \tfrac{\pi}{2} = 0 \, , \cos 0 = 1$$

$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

נציב $t = \ln x$:

$$\begin{aligned}
dt &= \frac{1}{x}dx \\
\int \frac{dx}{x\left(\ln x\right)^3} &= \int \frac{dt}{t^3} \\
&= -\frac{1}{2t^2}\bigg|_{t=\ln x} \\
&= -\frac{1}{2\left(\ln x\right)^2} + C
\end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל המסוים:

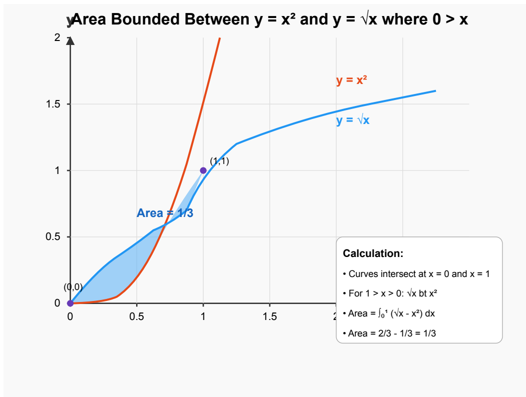
$$\begin{aligned}
\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\left(\ln x\right)^3} &= -\frac{1}{2\left(\ln x\right)^2}\bigg|_e^{e^2} \\
&= -\frac{1}{2\left(\ln e^2\right)^2} + \frac{1}{2\left(\ln e\right)^2} \\
&= -\frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{2\cdot 1^2} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \\
&= \boxed{\frac{3}{8}}
\end{aligned}$$

שאלה 5 - ליפים ולאמיצים שאינם עצלנים

מדלג.

שאלה 6

חשבו את השטח המוגבל בין שני הגרפים $y = x^2$ ו-$y = \sqrt{x}$ כאשר $x > 0$.



$y = x^2\ , y = \sqrt{x}$

נתחיל בלמצוא את נקודת החיתוך שממנה הגרפים כבר לו מגבילים ביניהם שטח כלשהו.

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$$

עד לנקודה $x = 1$ השורש דווקא יהיה גדול יותר. אז נחשב את האינטגרל שלו (השטח מתחתיו), ואז נפחית מזה את האינטגרל של פונקציית הריבוע.

$$\int_0^1 \sqrt{x}dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$$

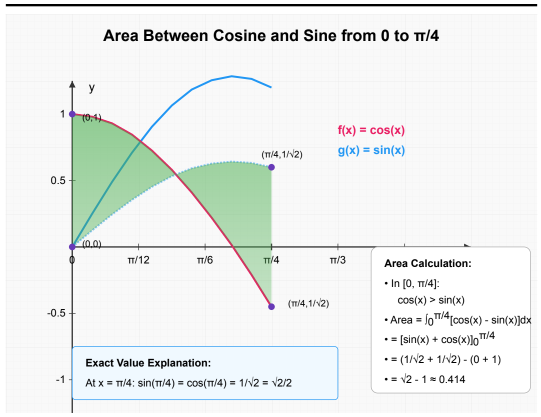
$$\int_0^1 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

סך הכל נקבל שהשטח הוא:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{1} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

שאלה 7

חשבו את השטח המוגבל בין הפונקציה $f(x) = \cos x$ לבין הפוטנקציה $g(x) = \sin x$ בתחום שבין $x = 0$ לבין $x = \frac{\pi}{4}$.



$$f(x) = \cos x \,,\, g(x) = \sin x$$

נפעל בשיטה דומה. בשטח הנתון פונקציית הקוסינוס מעל פונקציית הסינוס - עד לנקודה $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\pi/4} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/4} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/4} &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (-\cos(0)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ &= \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

השטח הוא הפרש האינטגרלים:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} - \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} &= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\sqrt{2} - 1}\end{aligned}$$

שאלה 8

אלמנט אורך אינפיניטסימלי של עקומה הניתנת לתיאור באמצעות הפונקציה $y = f(x)$ נתון בביטוי:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

ואורך העקומה מהנקודה $x = a$ ועד הנקודה $x = b$ נתון באינטגרל:

$$S = \int_a^b ds$$

1. הסבירו במילים שלכם **מדוע זה כך**.
2. **הוכיחו**:

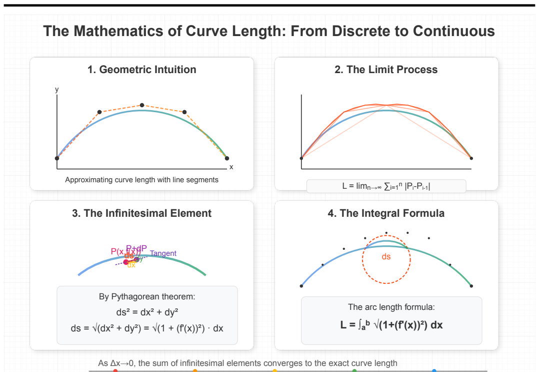
$$S=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

במקור נכתב:

$$S=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

3. חשבו את האורך של העקומה $y=\cosh x$ בתחום שבין $x=0$ לבין $x=\ln 2$.

הסבר לנוסחה לאורך של מסילה



ds של קטן אורך עם עקומה