

דף נוסחאות - בוחן אמצע במתמטיקה

23:12:48 2025-01-04

תוכן העניינים

2	נוסחאות בסיסיות
2	נוסחת השורשים
2	$(a + b)^3$ ו- $(a - b)^3$
2	חוקי חזקות
2	לוגריתמים
3	טריגונומטריה
3	זהויות בסיסיות
3	נוסחאות חיבור וחסור
3	זהויות טריגונומטריות נוספות
3	נוסחאות חצי זווית
3	טבלת זוויות מיוחדות
4	נגזרות
4	חוקי נגזרת
4	נגזרות של פונקציות טריגונומטריות
4	חוקי נגזרת לפונקציות מורכבות
5	נגזרת של פונקציות היפרבוליות
5	גזירה פרמטרית
5	פונקציות היפרבוליות
5	היפוך של פונקציות היפרבוליות
6	זהויות היפרבוליות
6	גבולות חשובים
6	גבולות טריגונומטריים
6	גבולות אקספוננציאליים ולוגריתמיים
7	גבולות של e
7	גבולות היפרבוליים
7	גבולות אי-מוגדרים מיוחדים
7	גרפים
7	פונקציות חשובות לזכור
8	פרמטרים משפיעים על גרפים

נוסחאות בסיסיות

נוסחת השורשים

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(a - b)^3 \text{ ו- } (a + b)^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

חוקי חזקות

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

לוגריתמים

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln(x^n) = n \ln(x)$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$\ln(e^{x^2}) = x^2$$

טריגונומטריה

זהויות בסיסיות

$$\begin{aligned}\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(2x) &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(x) \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}\end{aligned}$$

נוסחאות חיבור וחסור

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \\ \tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}\end{aligned}$$

זהויות טריגונומטריות נוספות

$$\begin{aligned}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \\ \tan^2(x) + 1 &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \cot^2(x) + 1 &= \frac{1}{\sin^2(x)}\end{aligned}$$

נוסחאות חצי זווית

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}} \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}\end{aligned}$$

טבלת זוויות מיוחדות

זווית	סינוס	קוסינוס	טנגנס
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	∞

 טנגנס קוסינוס סינוס זווית

נגזרות

חוקי נגזרת

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(c) &= 0 \\ \frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1} \\ \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x \\ \frac{d}{dx}(\ln(x)) &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}(a^x) &= a^x \ln(a)\end{aligned}$$

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin(x)) &= \cos(x) \\ \frac{d}{dx}(\cos(x)) &= -\sin(x) \\ \frac{d}{dx}(\tan(x)) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \frac{d}{dx}(\cot(x)) &= -\frac{1}{\sin^2(x)} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) &= \left(\frac{1}{\cos x}\right) \tan(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) &= -\left(\frac{1}{\sin x}\right) \cot(x)\end{aligned}$$

חוקי נגזרת לפונקציות מורכבות

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) &= f'(x) \pm g'(x) \\ \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \\ \frac{d}{dx}(f(g(x))) &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

נגזרת של פונקציות היפרבוליות

$$\frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh(x)) = \operatorname{sech}^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}(x)) = -\operatorname{csch}(x) \cdot \operatorname{coth}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}(x)) = -\operatorname{sech}(x) \cdot \tanh(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{coth}(x)) = -\operatorname{csch}^2(x)$$

גזירה פרמטרית

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

פונקציות היפרבוליות

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$1 - \tanh^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$$

היפוך של פונקציות היפרבוליות

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

$$\operatorname{coth}(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$$

זהויות היפרבוליות

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x) \tanh(y)}$$

גבולות חשובים

גבולות טריגונומטריים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

גבולות אקספוננציאליים ולוגריתמיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$$

גבולות של e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x &= e^k \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx} &= e^k \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n &= e^x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \quad (\text{when } a > 0) \end{aligned}$$

גבולות היפרבוליים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

גבולות אי-מוגדרים מיוחדים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} &= 0 \quad (\text{for } a \in \mathbb{R}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} &= 0 \quad (\text{for } n \in \mathbb{N}) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} &= \infty \quad (\text{for } n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

גרפים

פונקציות חשובות לזכור

פונקציות אקספוננציאליות ולוגריתמיות

- e^x : עולה במהירות, עוברת דרך הנקודה $(0, 1)$
- $\ln(x)$: עולה לאט, עוברת דרך הנקודה $(1, 0)$, אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0$

פונקציות טריגונומטריות

- $\sin(x)$: תנודות בין -1 ל-1, מחזור 2π , נקודות אפס ב- $n\pi$
- $\cos(x)$: תנודות בין -1 ל-1, מחזור 2π , נקודות אפס ב- $(n + \frac{1}{2})\pi$
- $\tan(x)$: אסימפטוטות אנכיות ב- $(n + \frac{1}{2})\pi$, מחזור π

פונקציות רציונליות

- $\frac{1}{x}$: אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0$, אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$
- $\frac{1}{x^2}$: תמיד חיובית, אסימפטוטה אנכית ב- $x = 0$, אסימפטוטה אופקית ב- $y = 0$

פרמטרים משפיעים על גרפים

פרמטר	הגרף על השפעה
$f(x) + c$	למעלה/למטה אנכית הזזה
$f(x + c)$	ימינה/שמאלה אופקית הזזה
$cf(x)$	אנכי מתיחה/כיווץ
$f(cx)$	אופקי מתיחה/כיווץ
$-f(x)$	x ציר סביב שיקוף
$f(-x)$	y ציר סביב שיקוף